



Biblioteca dell'Accademia Navale

Collana didattica

Serie di matematica

13

1. Gennaro Giannuzzi, Sergio Guerra, Gaetano Pizzarello, *Richiami di matematica elementare*, pp. 276.
2. Gennaro Giannuzzi, Angela Dalena, Claudio Santoni, *Esercizi di algebra elementare*, pp. 232.
3. Gennaro Giannuzzi, *Lezioni di analisi matematica*, vol. I, pp. 382.
4. Gennaro Giannuzzi, *Lezioni di analisi matematica*, vol. II, pp. 396.
5. Angela Dalena, Gennaro Giannuzzi, Claudio Santoni, *Esercizi di analisi matematica*, vol. I - parte I, pp. 322.
6. Angela Dalena, Gennaro Giannuzzi, Claudio Santoni, *Esercizi di analisi matematica*, vol. I - parte II, pp. 348.
7. Gennaro Giannuzzi, Angela Dalena, Claudio Santoni, *Lezioni di matematica I*, pp. 468.
8. Franco Vettori, Aldo Volpi, *Esercizi di geometria e trigonometria*, pp. 180.
9. Gaetano Pizzarello, Aldo Volpi, *Geometria e Algebra*, pp. 408.
10. Claudio Santoni, Carla Antoni, Piero Palmieri, *Lezioni di matematica II*, con esercizi risolti, pp. 390.
11. Gennaro Giannuzzi, *Lezioni di istituzioni di matematiche*, pp. 280.
12. Angela Dalena, Gennaro Giannuzzi, Claudio Santoni, *Esercizi di istituzioni di matematiche*, pp. 384.
13. Piergiuseppe Palmieri, *Calcolo Numerico*, pp. 304.

ACCADEMIA NAVALE
A.N. AN-021

P. Palmieri

Calcolo Numerico



Edizioni ETS

© Copyright 2021
Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884676215-3

L'obiettivo principale dell'Analisi Numerica (o Calcolo Numerico) è quello di *trovare gli algoritmi che risolvono un problema matematico nel minimo tempo e con la massima accuratezza* (V. Comincioli).

In questo testo, rivolto agli studenti del primo anno del Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni, ho voluto pertanto affrontare, da un punto di vista più *numerico*, ovvero presentando opportuni algoritmi di calcolo, alcuni problemi dell'Algebra Lineare e dell'Analisi Matematica (come, ad esempio, la ricerca degli autovalori di una matrice, la risoluzione di un sistema lineare, la ricerca delle radici di una equazione o il calcolo di un integrale definito) che non si riescono a risolvere (oppure sono troppo complicati da risolvere...) con le tecniche standard *teoriche* delle rispettive discipline.

Introduzione

In questo paragrafo, a carattere introduttivo, si cerca inizialmente di chiarire il significato dell'espressione *fare dell'analisi numerica*.

Successivamente si evidenziano, in maniera schematica, i principi che fanno da supporto e da filo conduttore ai vari problemi e metodi dell'analisi numerica; segue, infine, un tentativo di *classificazione* dei problemi numerici con lo scopo di individuare e caratterizzare i diversi livelli di difficoltà presenti nella loro risoluzione.

Un modo per comprendere il *carattere* di una disciplina è di esaminarne gli obiettivi, i quali possono essere enunciati in forme diverse ma equivalenti nella sostanza. Si può dire allora che obiettivo principale dell'analisi numerica è *trovare gli algoritmi che risolvono un problema matematico nel minimo tempo e con la massima accuratezza*.

In maniera schematica, si possono distinguere nell'analisi numerica i seguenti due aspetti: la **metodologia**, che tratta in particolare la costruzione di algoritmi specifici, la loro efficienza e la loro implementazione per un particolare calcolatore, e l'**analisi**, che studia i principi di fondo, le stime degli errori, la convergenza dei metodi. Il primo è un aspetto più *pratico*, mentre il secondo è

più *teorico*: nella risoluzione numerica di un problema i due aspetti, in generale ambedue presenti, si integrano a vicenda.

I principi di fondo dell'analisi numerica sono l'*iterazione*, ovvero la ripetizione di un processo "semplice" per migliorare la stima della soluzione di un problema più "complicato" (ad esempio per la ricerca dello zero di una funzione o per il calcolo della radice quadrata di un numero reale positivo), e l'*approssimazione*, ovvero l'operazione consistente nel sostituire ad una funzione complicata, cioè non calcolabile direttamente, una funzione più "semplice". Ovviamente il significato preciso del termine "semplice" dipende dal contesto, ovvero dall'uso che di tale funzione viene fatto: le procedure più comuni per ottenere questo tipo di approssimazione sono basate su uno sviluppo in serie troncato oppure su una operazione di interpolazione.

Per poter infine tentare una classificazione dei problemi computazionali, si rappresentano in forma schematica un *problema numerico* nella forma seguente:

$$Tx = y \quad x \in X \quad , \quad y \in Y$$

dove X e Y sono spazi lineari e $T : X \rightarrow Y$ è un operatore. Si possono allora distinguere i seguenti tre tipi di problemi, in ordine crescente di difficoltà:

1) Il problema diretto. Dati x e T , determinare y . Problemi di questo tipo sono, ad esempio, il calcolo del valore di una funzione assegnata per un valore fissato della variabile indipendente o il calcolo di un integrale definito, nel qual caso l'*input* x è dato dalla funzione integranda e dall'insieme di integrazione mentre T è l'operatore di integrazione.

2) Il problema inverso. Dati T e y , determinare x . Esempi di questo tipo sono la risoluzione di un problema differenziale ai valori iniziali o la risoluzione di un sistema lineare di equazioni $Ax = b$, nel qual caso si conosce l'*output* b , l'operatore A e si vuole conoscere l'*input* x .

3) Il problema di identificazione. Data una famiglia di x e y , trovare T . Si tratta, in sostanza, del problema della *costruzione di un modello matematico*.

È opportuno sottolineare che *problema diretto* non significa necessariamente assenza di *difficoltà numeriche*. In particolare, il successivo capitolo 6 sarà dedicato allo studio dell'*approssimazione* di una funzione mediante funzioni *più semplici*, come ad esempio i polinomi, e quindi calcolabili con un numero finito di operazioni. Tale approssimazione è la base per la costruzione di algoritmi per il calcolo di funzioni non elementari. Nel successivo capitolo 7 si proseguirà con l'analisi del problema dell'integrazione. Le questioni numeriche che si pongono per un problema diretto riguardano lo studio degli *errori di troncamento* e della *convergenza*, nonché della *stabilità* degli algoritmi proposti.

Il *problema inverso* rappresenta, anche per le sue importanti applicazioni, il problema centrale dell'analisi numerica. In alcuni casi particolari può essere

ricondotto ad un problema diretto, come ad esempio nella formula risolutiva di un sistema lineare mediante il calcolo della matrice inversa.

La conoscenza dell'*operatore inverso* può essere interessante dal punto di vista teorico e, talvolta, anche dal punto di vista pratico per evidenziare il comportamento qualitativo della soluzione; tuttavia, dal punto di vista numerico, ovvero per una valutazione quantitativa, non è necessariamente di aiuto: nel caso infatti di un sistema lineare, il calcolo dell'inversa della matrice non è sempre lo strumento più adatto per il calcolo della soluzione.

Il *problema di identificazione*, il più ambizioso dei tre tipi di problemi, presenta in generale le più grosse difficoltà. Analizzando come esempio una situazione particolare che si inquadra nella teoria dell'approssimazione: supponendo che una funzione incognita sia data solo per punti, ovvero in forma tabellare, e che si voglia conoscere valori di tale funzione in punti diversi da quelli dati. Il problema è quindi quello di approssimare una funzione sulla base della conoscenza di alcuni suoi valori, i quali possono essere dati sperimentali e pertanto affetti da errori di misura.

Ovviamente il problema può non avere soluzione unica, a meno che non si restringa opportunamente la classe delle *funzioni ammissibili*, ad esempio assumendo come approssimazione di T una combinazione lineare finita di elementi di una base (ad esempio una combinazione di polinomi). Il problema è in questo modo ricondotto alla ricerca di un numero finito di parametri (detti comunemente *gradi di libertà*) i quali vengono usualmente calcolati *minimizzando* una opportuna misura dell'errore (o *scarto*) tra i dati del problema e quelli forniti dalla approssimazione di T . Si ha quindi, in definitiva, un *problema di programmazione matematica* che, per gli scopi del presente testo, verrà trattato solamente in pochi cenni.

Indice

1	Teoria degli errori	11
1.1	Rappresentazione empirica dei numeri	12
1.1.1	Il teorema di rappresentazione in base	12
1.1.2	Convenzioni di scrittura	14
1.1.3	Conversione di base	15
1.2	Approssimazioni canoniche	18
1.2.1	Errore assoluto ed errore relativo	18
1.3	L'errore nel calcolo del valore numerico di una funzione	20
1.3.1	Il caso delle funzioni di una variabile	20
1.3.2	Il caso delle funzioni di più variabili	23
1.4	Rappresentazione delle funzioni regolari	27
1.4.1	I polinomi in una variabile	27
1.4.2	Tabulazione di un polinomio	29
1.4.3	Le funzioni regolari	31
1.4.4	Tabulazione delle funzioni regolari	36
2	Risoluzione numerica delle equazioni	39
2.1	I metodi iterativi	39
2.1.1	Il metodo delle corde	40
2.1.2	Il metodo delle tangenti	43
2.1.3	Ordine di una iterazione	44
2.1.4	Radici multiple	46
2.1.5	Teoria generale dei metodi iterativi	47
2.2	Le equazioni algebriche a coefficienti reali	50
2.2.1	Limitazione superiore ed inferiore per le radici reali	52
2.2.2	Il teorema di Sturm	53
2.2.3	Successioni di Sturm relative ad una equazione algebrica	55
3	Elementi di teoria delle matrici	61
3.1	Matrici, vettori, sistemi lineari	61
3.1.1	Prime definizioni	61
3.1.2	Operazioni sulle matrici	62
3.1.3	Vettori	63
3.1.4	Matrici quadrate con particolari proprietà	68

3.1.5	Determinante di una matrice	69
3.1.6	Matrice aggiunta e matrice inversa	70
3.1.7	Sistemi lineari	71
3.1.8	Matrici a blocchi	73
3.1.9	Matrici riducibili	74
3.2	Autovalori ed autovettori. Matrici simili. Forme hermitiane	80
3.2.1	Definizioni e prime proprietà	80
3.2.2	Teorema di Hamilton-Cayley e polinomio minimo	85
3.2.3	Matrici simili	86
3.2.4	Autovalori e autovettori delle matrici hermitiane	92
3.2.5	Forma canonica di Jordan	93
3.2.6	Matrici convergenti	96
3.2.7	Matrici elementari	98
3.2.8	Matrici di rotazione	102
3.2.9	Forme hermitiane	103
3.3	Norme	110
3.3.1	Norme vettoriali	110
3.3.2	Norme matriciali	112
4	Metodi per il calcolo di autovalori ed autovettori	119
4.1	Teoremi di localizzazione. Il caso delle matrici tridiagonali.	119
4.1.1	Considerazioni introduttive	119
4.1.2	Localizzazione	120
4.1.3	Autovalori delle matrici tridiagonali	123
4.1.4	Riduzione di una matrice reale simmetrica a forma tridiagonale	126
4.2	Metodi diretti	131
4.2.1	Il metodo di Jacobi	131
4.2.2	Il metodo delle potenze	134
4.2.3	Il metodo LR	137
4.2.4	Il metodo QR	137
5	Risoluzione dei sistemi lineari	141
5.1	Metodi diretti	142
5.1.1	Considerazioni introduttive	142
5.1.2	Il metodo di Gauss	143
5.1.3	Il metodo del pivot	146
5.1.4	Metodi di fattorizzazione	147
5.1.5	Il metodo di Gauss-Jordan	153
5.1.6	Errori, stabilità e condizionamento	154
5.1.7	Sistemi lineari sovradimensionati	157
5.2	Metodi iterativi	159
5.2.1	Considerazioni di carattere generale	159
5.2.2	Il metodo di Jacobi	161
5.2.3	Il metodo di Gauss-Seidel	162
5.2.4	Metodi di rilassamento	165

6	Interpolazione ed approssimazione	169
6.1	Interpolazione mediante polinomi algebrici	170
6.1.1	Introduzione	170
6.1.2	Il polinomio di interpolazione di Lagrange	171
6.1.3	Il polinomio di interpolazione di Newton	173
6.1.4	Interpolazione polinomiale a nodi multipli	177
6.2	Approssimazione in media quadratica	182
6.2.1	Il caso discreto	183
6.2.2	Il caso continuo	183
6.3	Interpolazione trigonometrica	185
6.4	Derivazione numerica	188
7	Integrazione numerica	191
7.1	Formule di quadratura di tipo interpolatorio	192
7.1.1	Introduzione	192
7.1.2	Le formule di Newton-Cotes	194
7.1.3	Le formule generalizzate	197
7.2	Formule di quadratura gaussiane	203
7.2.1	Il problema di Gauss	203
7.2.2	Polinomi ortogonali	205
7.2.3	Formule di quadratura gaussiane	211
8	Risoluzione numerica delle equazioni differenziali ordinarie	221
8.1	Il metodo di Runge - Kutta	221
8.1.1	Premessa	221
8.1.2	Considerazioni preliminari	223
8.1.3	Il metodo di Runge-Kutta e le formule di quadratura di Newton-Cotes	226
8.1.4	Su una valutazione empirica dell'errore di troncamento . .	228
8.1.5	Su una maggiorazione dell'errore	230
9	Esercizi risolti	233

Edizioni ETS

Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa

info@edizioniets.com - www.edizioniets.com

Finito di stampare nel mese di ottobre 2021