Biblioteca dell’Accademia Navale

Collana didattica

Serie di matematica

13

1. Gennaro Giannuzzi, Sergio Guerra, Gaetano Pizzarello, *Richiami di matematica elementare*, pp. 276.
2. Gennaro Giannuzzi, Angela Dalena, Claudio Santoni, *Esercizi di algebra elementare*, pp. 232.
3. Gennaro Giannuzzi, *Lezioni di analisi matematica*, vol. I, pp. 382.
4. Gennaro Giannuzzi, *Lezioni di analisi matematica*, vol. II, pp. 396.
5. Angela Dalena, Gennaro Giannuzzi, Claudio Santoni, *Esercizi di analisi matematica*, vol. I - parte I, pp. 322.
6. Angela Dalena, Gennaro Giannuzzi, Claudio Santoni, *Esercizi di analisi matematica*, vol. I - parte II, pp. 348.
7. Gennaro Giannuzzi, Angela Dalena, Claudio Santoni, *Lezioni di matematica I*, pp. 468.
8. Franco Vettori, Aldo Volpi, *Esercizi di geometria e trigonometria*, pp. 180.
9. Gaetano Pizzarello, Aldo Volpi, *Geometria e Algebra*, pp. 408.
10. Claudio Santoni, Carla Antoni, Piero Palmieri, *Lezioni di matematica II*, con esercizi risolti, pp. 390.
11. Gennaro Giannuzzi, *Lezioni di istituzioni di matematiche*, pp. 280.
12. Angela Dalena, Gennaro Giannuzzi, Claudio Santoni, *Esercizi di istituzioni di matematiche*, pp. 384.
13. Piergiuseppe Palmieri, *Calcolo Numerico*, pp. 304.

ACCADEMIA NAVALE
A.N. AN-021

P. Palmieri

Calcolo Numerico

Edizioni ETS

Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884676215-3

L'obiettivo principale dell'Analisi Numerica (o Calcolo Numerico) è quello di *trovare gli algoritmi che risolvono un problema matematico nel minimo tempo e con la massima accuratezza* (V. Comincioli).

In questo testo, rivolto agli studenti del primo anno del Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni, ho voluto pertanto affrontare, da un punto di vista più *numerico*, ovvero presentando opportuni algoritmi di calcolo, alcuni problemi dell'Algebra Lineare e dell'Analisi Matematica (come, ad esempio, la ricerca degli autovalori di una matrice, la risoluzione di un sistema lineare, la ricerca delle radici di una equazione o il calcolo di un integrale definito) che non si riescono a risolvere (oppure sono troppo complicati da risolvere...) con le tecniche standard *teoriche* delle rispettive discipline.

Introduzione

In questo paragrafo, a carattere introduttivo, si cerca inizialmente di chiarire il significato dell'espressione *fare dell'analisi numerica.*

Successivamente si evidenziano, in maniera schematica, i principi che fanno da supporto e da filo conduttore ai vari problemi e metodi dell'analisi numerica; segue, infine, un tentativo di *classificazione* dei problemi numerici con lo scopo di individuare e caratterizzare i diversi livelli di difficoltà presenti nella loro risoluzione.

Un modo per comprendere il *carattere* di una disciplina è di esaminarne gli obiettivi, i quali possono essere enunciati in forme diverse ma equivalenti nella sostanza. Si può dire allora che obiettivo principale dell'analisi numerica è *trovare gli algoritmi che risolvono un problema matematico nel minimo tempo e con la massima accuratezza.*

In maniera schematica, si possono distinguere nell'analisi numerica i seguenti due aspetti: la **metodologia**, che tratta in particolare la costruzione di algoritmi specifici, la loro efficienza e la loro implementazione per un particolare calcolatore, e l'**analisi**, che studia i principi di fondo, le stime degli errori, la convergenza dei metodi. Il primo è un aspetto più *pratico*, mentre il secondo è più *teorico*: nella risoluzione numerica di un problema i due aspetti, in generale ambedue presenti, si integrano a vicenda.

I principi di fondo dell'analisi numerica sono l'*iterazione*, ovvero la ripetizione di un processo "semplice" per migliorare la stima della soluzione di un problema più "complicato" (ad esempio per la ricerca dello zero di una funzione o per il calcolo della radice quadrata di un numero reale positivo), e l'*approssimazione*, ovvero l'operazione consistente nel sostituire ad una funzione complicata, cioé non calcolabile direttamente, una funzione più "semplice". Ovviamente il significato preciso del termine "semplice" dipende dal contesto, ovvero dall'uso che di tale funzione viene fatto: le procedure più comuni per ottenere questo tipo di approssimazione sono basate su uno sviluppo in serie troncato oppure su una operazione di interpolazione.

Per poter infine tentare una classificazione dei problemi computazionali, si rappresenti in forma schematica un *problema numerico* nella forma seguente:

$$Tx = y \qquad x \in X \quad , \quad y \in Y$$

dove X e Y sono spazi lineari e $T : X \to Y$ è un operatore. Si possono allora distinguere i seguenti tre tipi di problemi, in ordine crescente di difficoltà:

1) *Il problema diretto.* Dati x e T, determinare y. Problemi di questo tipo sono, ad esempio, il calcolo del valore di una funzione assegnata per un valore fissato della variabile indipendente o il calcolo di un integrale definito, nel qual caso l'*input* x è dato dalla funzione integranda e dall'insieme di integrazione mentre T è l'operatore di integrazione.

2) *Il problema inverso.* Dati T e y, determinare x. Esempi di questo tipo sono la risoluzione di un problema differenziale ai valori iniziali o la risoluzione di un sistema lineare di equazioni $Ax = b$, nel qual caso si conosce l'*output* b, l'operatore A e si vuole conoscere l'*input* x.

3) *Il problema di identificazione.* Data una famiglia di x e y, trovare T. Si tratta, in sostanza, del problema della *costruzione di un modello matematico.*

È opportuno sottolineare che *problema diretto* non significa necessariamente assenza di *difficoltà numeriche.* In particolare, il successivo capitolo 6 sarà dedicato allo studio dell'*approssimazione* di una funzione mediante funzioni *più semplici*, come ad esempio i polinomi, e quindi calcolabili con un numero finito di operazioni. Tale approssimazione è la base per la costruzione di algoritmi per il calcolo di funzioni non elementari. Nel successivo capitolo 7 si proseguirà con l'analisi del problema dell'integrazione. Le questioni numeriche che si pongono per un problema diretto riguardano lo studio degli *errori di troncamento* e della *convergenza*, nonchè della *stabilità* degli algoritmi proposti.

Il *problema inverso* rappresenta, anche per le sue importanti applicazioni, il problema centrale dell'analisi numerica. In alcuni casi particolari può essere ricondotto ad un problema diretto, come ad esempio nella formula risolutiva di un sistema lineare mediante il calcolo della matrice inversa.

La conoscenza dell'*operatore inverso* può essere interessante dal punto di vista teorico e, talvolta, anche dal punto di vista pratico per evidenziare il comportamento qualitativo della soluzione; tuttavia, dal punto di vista numerico, ovvero per una valutazione quantitativa, non è necessariamente di aiuto: nel caso infatti di un sistema lineare, il calcolo dell'inversa della matrice non è sempre lo strumento più adatto per il calcolo della soluzione.

Il *problema di identificazione*, il piú ambizioso dei tre tipi di problemi, presenta in generale le più grosse difficoltà. Analizzando come esempio una situazione particolare che si inquadra nella teoria dell'approssimazione: supponendo che una funzione incognita sia data solo per punti, ovvero in forma tabellare, e che si voglia conoscere valori di tale funzione in punti diversi da quelli dati. Il problema è quindi quello di approssimare una funzione sulla base della conoscenza di alcuni suoi valori, i quali possono essere dati sperimentali e pertanto affetti da errori di misura.

Ovviamente il problema può non avere soluzione unica, a meno che non si restringa opportunamente la classe delle *funzioni ammissibili*, ad esempio assumendo come approssimazione di T una combinazione lineare finita di elementi di una base (ad esempio una combinazione di polinomi). Il problema è in questo modo ricondotto alla ricerca di un numero finito di parametri (detti comunemente *gradi di libertà*) i quali vengono usualmente calcolati *minimizzando* una opportuna misura dell'errore (o *scarto*) tra i dati del problema e quelli forniti dalla approssimazione di T. Si ha quindi, in definitiva, un *problema di programmazione matematica* che, per gli scopi del presente testo, verrà trattato solamente in pochi cenni.

Indice

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com
Finito di stampare nel mese di ottobre 2021