a–n–a–l–i–t–i–c–a

18

Analitica propone una serie di testi
– classici, monografie, strumenti antologici e manuali –
dedicati ai più importanti temi della ricerca filosofica,
con particolare riferimento alla logica, all'epistemologia
e alla filosofia del linguaggio.
Destinati allo studio, alla documentazione e all'aggiornamento critico,
i volumi di Analitica intendono toccare sia i temi istituzionali
dei vari campi di indagine, sia le questioni emergenti collocate
nei punti di intersezione fra le varie aree di ricerca.

Gabriele Lolli

Il fascino discreto della matematica

Calvino, l'Oulipo e Bourbaki

Edizioni ETS

www.edizioniets.com

L'editore resta a disposizione degli aventi diritto non potuti reperire

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884675993-1

Il fascino discreto della matematica

Calvino, l’Oulipo e Bourbaki

Indice

1 Prologo: la combinatoria

Come fa "la buona massaia che tesse lane diverse e ne ottiene una sola stoffa, o come fa l'ape laboriosa che ricava cera e miele da tanti fiori e in questo modo li ricompone in un nuovo mazzo" così ...
(Robert Burton, *L'anatomia della malinconia*, 1621)

La considerazione della matematica nella prospettiva della narrazione, le possibili analogie tra l'attività del matematico e dello scrittore o poeta sono diventate da tempo un argomento che attira.

Si sono raccolte dichiarazioni di matematici e persino di fisici sul ruolo di guida svolto dalla bellezza: "La bellezza è il primo criterio; non c'è alcuno spazio permanente nel mondo per una brutta [*ugly*] matematica" (Hardy),[1] oppure "avrei pensato che le nuove idee [rinormalizzazione] fossero corrette, se non fossero state così brutte. [...] È più importante che le proprie equazioni siano belle che in accordo con gli esperimenti" (Dirac),[2] – dove addirittura il criterio estetico la vince sulla pesantezza dell'essere. Si potrebbe continuare con decine, letteralmente, di citazioni, ma ci limitiamo ad accostare agli scienziati contemporanei il filosofo più eminente, Aristotele (383-322), secondo il quale, nella *Metafisica*, coloro che conoscono e praticano l'aritmetica e la geometria giungono, a suo avviso, a risultati eccellenti "ponendo come separato ciò che non lo è". Porre "come separato ciò che non lo è" è il modo di Aristotele di intendere la differenza tra i concetti matematici e le cose reali che sono oggetto ciascuna di altre discipline; per esempio considerando una sfera come la superficie matematica "separata" di una palla si può dire che essa ha un solo punto di contatto con un piano tangente su cui la palla giace.[3] La conseguenza della disposizione a trattare come separato ciò non lo è (come esistente in atto ciò che non esiste che in potenza, come essere uno pseudo-essere) è che la norma delle matematiche non può essere il vero, poiché il vero non si lascia approssimare da una finzione. La norma delle matematiche è il

[1] [Hardy 1967, p. 85].

[2] La prima parte della dichiarazione, di Paul Dirac (1902-1980), è stata raccolta da Freeman Dyson (1923-2020) nel 1950, cit. da Vincenzo Barone in [Dirac 1963, trad. it. p. 17]; la seconda è ivi, p. 77.

[3] [Aristotele 1928, Metafisica libro M 2 10 e libro B]. Si salva così la possibilità di incontro e collaborazione tra scienze che non potrebbero altrimenti, secondo le sue regole metodologiche, utilizzare al loro interno se non i propri principi. I numeri per Aristotele non sono nelle cose, ma neppure appartengono al mondo delle Idee.

bello. Poiché il matematico con le sue finzioni separa innanzitutto relazioni d'ordine, simmetrie, entità concettuali semplici e trasparenti; ora "le forme più alte del bello sono l'ordine, la simmetria, il limite". Ne risulta che "il bello è l'oggetto principale delle dimostrazioni matematiche".

Si è notato un parallelismo tra le qualità e i valori della letteratura messi in evidenza da Italo Calvino (1923-1985) nelle *Lezioni americane* e quelli perseguiti nella produzione matematica;[4] sono stati analizzati gli stili di scrittura di matematici come Georg Cantor (1845-1918), Alan M. Turing (1912-1954), Jean Dieudonné (1906-1992), André Weil (1906-1998);[5] i pochi scrittori che hanno fatto osservazioni, siano esse estemporanee, pertinenti o profonde, sulla matematica, da Henri Brulard (pseudonimo di Stendhal, pseudonimo di Marie-Henri Beyle (1783-1842)) a Robert Musil (1880-1942) sono largamente noti; gli ancor meno numerosi matematici che sono stati anche scrittori non occasionali, Sof'ja Kowalevskaja (1850-1891) con memorie, romanzi e drammi, o Felix Hausdorff (1868-1942) sotto lo pseudonimo Paul Mongré con opere filosofiche e teatrali, attendono invece ancora una valutazione critica.

Ma non è di questo che parleremo nel presente libro, premettendo qui solo, a sua giustificazione, un'osservazione in favore della prosecuzione della riflessione sui rapporti tra le due attività, contro le perplessità di chi si chiede cos'abbia a che fare la bellezza, prerogativa dell'artista, con la razionalità, privilegio del matematico.

Per la bellezza valga la sentenza di Aristotele. Quello di razionalità è un concetto storicamente determinato. Nel VI, V sec. a. C., al tempo dei filosofi della natura greci, e ancora in Lucrezio (I sec.), voleva essere una cosmogonia e una spiegazione unitaria di tutto l'universo e di tutti i fenomeni che ci coinvolgono, inclusi quelli morali. Platone (IV sec.) fece largo uso dei miti nella presentazione della sua filosofia, come forma di conoscenza superiore a quella delle scienze. Una parentesi iniziata dal V sec. vide il movimento dei sofisti volgere la sua attenzione all'uomo e alla vita sociale disinteressandosi della cosmologia e dello studio della natura, e proponendo la pratica della dialettica e della retorica per la formazione di buoni cittadini. Introdotto il concetto di cultura (παιδεία), ciascuna con le sue regole e leggi, i sofisti si chiedevano se esistesse una cultura superiore alle altre, e optavano per un relativismo etico e culturale. Fatale per il loro credito fu la circostanza che

[4] [Lolli 2011]. Le *Lezioni americane* del 1985 sono in [Calvino 1985a].

[5] [Lolli 2020a].

facevano pagare il loro insegnamento. Per una delle frequenti ironie della storia, la razionalità da loro praticata è stata identificata con il paralogismo e l'eristica: il termine "sofista" (σοφιστής), etimologicamente "sapiente", con i derivati "sofisma" e "sofistico", è diventato sinonimo di cavilloso, capzioso, in un'accezione dispregiativa.

Nel Medio Evo era la teologia la razionalità per eccellenza, ché solo essa realizzava l'ideale del metodo deduttivo, di dedurre da proposizioni necessarie altre proposizioni necessarie; la ragione era ancella della teologia, con il compito di riconoscere la non contraddittorietà dei presupposti della fede, come l'esistenza di Dio (Tommaso d'Aquino, XIII sec.), o per affrontare *quæstiones* religiose attraverso la dialettica.

Con la scienza moderna la razionalità è diventata la capacità e la volontà di risolvere problemi sulla base delle conoscenze, dei vincoli e delle risorse disponibili, rifuggendo da risposte dettate da oracoli, pregiudizi acritici, orientamenti naturali o costumi ereditati. Il suo simbolo è la logica, naturale per alcuni, per altri invece normativa. Tuttavia la logica è messa in discussione da che i cognitivisti hanno segnalato come il modo di pensare delle persone sia ancora condizionato da disposizioni innate (*bias*) che risalgono probabilmente alla vita preistorica, adatte a un mondo dove le reazioni immediate erano dettate dalla necessità di sfuggire ai pericoli senza avere il tempo di valutarne la verosimiglianza o la gravità: risposte spontanee e irriflesse. Ancora oggi, nella vita moderna dove ci si muove attrezzati con strumenti di calcolo e misura, dove la teoria della probabilità ha imparato a dominare la casualità, e la statistica a informare sui fenomeni di massa, l'essere umano reagisce ai problemi e ai compiti con la mentalità della caverna. Comunque il risolvere razionalmente i problemi non consiste in un percorso diretto in avanti, subitaneo o prolungato che sia, verso la soluzione ottimale, perché non esistono soluzioni ottimali; l'ottimo, anche questo abbiamo imparato, è relativo e dipende dai valori di riferimento.

La razionalità si è così trasformata in armonia, equilibrio, considerazione di punti di vista plurimi, elaborati da chi ragiona o recepiti dagli altri. La razionalità consiste dunque nel cercare e nel tenere insieme diverse prese (termine mutuato da Edmund Husserl (1859-1938)) o visioni parziali che nel loro concorso garantiscono di possedere un concetto o di saper valutare una situazione: paradossalmente armonia ed equilibrio non significano proporzione, concordia, effetto piacevole, piuttosto impongono di vedere un problema al modo come Picasso dipingeva i volti, da diverse prospettive simultanee.

Figura 1: Un volto di Picasso

La modifica ultima (per ora) dell'idea di razionalità può essere considerata parallela a quella che si è avuta con la filosofia del realismo, e essa ha un rilievo anche per quella di bellezza. La discussione sulla realtà degli universali risale alla teologia razionale, se non si vuole andare più indietro, poi nell'età moderna il realismo in campo scientifico ha avuto, e ancora ha, la funzione di affidare il ruolo di giudice ultimo a una realtà oggettiva; questa peraltro, per poter fornire un significato ai concetti della scienza non può essere solo la realtà materiale ma deve essere intessuta di astrazioni e universali, quali sono i riferimenti dei termini teorici, che perciò reclamano lo stato di cose reali. Il realismo sembra essere la filosofia spontanea e ingenua degli scienziati, inclusi i fisici, pur essendo questi ora consapevoli dell'imbarazzo suscitato dal riconoscimento degli effetti dell'interferenza – inevitabile – dell'osservatore negli esperimenti sul mondo sub-atomico, che non sembra abbia ancora trovato una sistemazione teorica convincente e condivisa. Anche la maggioranza dei matematici professano tale filosofia; pochi tuttavia sono informati della svolta che sembra in corso nel realismo matematico, almeno per quel riguarda l'esistenza degli oggetti astratti, dovuta proprio e ben rappresentata da uno dei suoi sostenitori più convinti.

Kurt Gödel (1906-1978) aveva proclamato, nel 1944, nell'analisi dell'opera di Bertrand Russell (1872-1970), che "[c]lassi e concetti possono [...] essere concepite come oggetti reali [...] che esistono indipendentemente dalle nostre definizioni e costruzioni. Mi sembra che l'assunzione di tali oggetti sia tanto legittima quanto l'assunzione di corpi fisici, e che ci siano altrettanti ragioni per credere nella loro esistenza".[6] Resosi poi conto di non riuscire a trovare argomenti cogenti a sostegno del realismo, si è rivolto a partire dal 1959 a esplorare la fenomenologia e ha fatto ricorso a Edmund Husserl per spiegare come concepiva la nostra presa del significato di un termine astratto, riassumendola in questo modo: la conoscenza dei concetti astratti non può consistere in una definizione, dalla quale risulti in modo determinato quali oggetti cadano sotto il concetto e quali no, ma in un atteggiarsi in modo adeguato, o entrare "in un nuovo stato di coscienza", nel quale siamo in grado di descrivere "i concetti fondamentali che usiamo nel nostro pensiero, o afferriamo (*grasp*) altri concetti fondamentali finora a noi ignoti":

> Qui [nella fenomenologia] la chiarificazione del significato consiste nel focalizzarsi più acutamente sui concetti in questione, dirigendo la nostra attenzione in un certo modo, vale a dire sugli atti che compiamo nell'uso di questi concetti, sui poteri che mettiamo in opera nell'esecuzione di questi atti, ecc.[7]

Così mentre la razionalità evolve negli obiettivi e negli strumenti, sostituendo alla logica metafisica la logica conversazionale o le logiche delle decisioni e delle scelte, il realismo che ne sarebbe il corrispettivo ontologico trasforma gli oggetti, concreti e astratti, in un caleidoscopio di immagini fratturate, nella matematica come nell'arte. Nella matematica l'astrazione arriva a eliminare gli oggetti sostituendoli con schemi che non permettono di individuarne alcun tipo, se non per tratti parziali, o che si adattano a molti tipi, a seconda di come si dirige l'attenzione.

Nel testo che segue si parlerà di alcuni scrittori contemporanei, testimoni e interpreti per la letteratura della frantumazione delle storie, vedendoli alle prese con problemi e tecniche di costruzione di opere letterarie suggerite dalla matematica, o in certi casi al contrario. Raymond Queneau (1903-1976), Jacques Roubaud (1932-), Italo Calvino sono tutti sensibili al fascino della matematica e stabiliscono o cercano rapporti con Bourbaki – i francesi soprattutto – e con la combinatoria – Calvino in particolare ma non solo.

La parola "combinatòria" (più raramente l'anglismo "combinatòrica", da *combinatorics* o *combinatorial analysis*) è un sostantivo che indica una disciplina matematica, oppure un'attività qualsiasi legata al combinare; è anche

[6] [Gödel 2002, p. 133].
[7] [Gödel 1961, p. 340].

aggettivo. Ci pare opportuna un'informazione introduttiva per il lettore, mentre di Bourbaki daremo notizia nel testo.

La combinatoria come disciplina matematica copre un insieme di ricerche che una persona inesperta, se guarda l'indice di un'introduzione moderna alla materia, *e.g.* [Wilson 2016], chiamerebbe piuttosto una congerie. Diversamente organizzate e legate tra loro secondo il gusto dell'autore vi troverà menzionate: permutazioni, combinazioni, piastrellature, poliedri, polimini, grafi, quadrati latini, quadrati magici, cabalistici, ..., disegni d'esperimento a blocchi, geometrie finite (con un numero finito di punti), partizioni, probabilità, ottimizzazioni.

Invece di dare tante definizioni, consideriamo alcuni esempi di problemi classificati come combinatori:

1. su una mappa stradale del Piemonte, quale è il percorso più breve che da Torino permette di visitare Alba, Canelli, Santo Stefano Belbo e Grinzane Cavour, con ritorno?

2. possiamo piastrellare una stanza con mattonelle quadrate e esagonali?

3. in un gruppo casuale di ventitré persone, quale è la probabilità che ci siano due persone con lo stesso compleanno?

4. esiste un algoritmo per uscire da un labirinto qualsiasi?

5. se un ristorante ha nel menu due antipasti, quattro primi, tre secondi e tre dessert quanti diversi pranzi si possono ordinare?

6. quanti sillogismi categorici si possono scrivere (tre proposizioni categoriche in ordine con tre predicati, S, P, M che occorrono una volta sola in ciascuna proposizione, e di cui M occorre nelle prime due – il cui ordine non importa – e non nella terza)?

7. quindici allieve di un collegio escono tre alla volta per sette giorni di seguito. Si chiede di redigere un calendario in modo tale che due qualunque di esse non escano mai insieme due volte.

Sono problemi apparentemente irrelati, ma in tutti si capisce di cosa si parla, a prescindere dal loro interesse, dalla capacità di risolverli e dalla loro intrinseca difficoltà.

Una definizione che ambirebbe a unificare e semplificare il quadro potrebbe essere la seguente: la combinatoria è lo studio delle possibilità e dei modi di “scegliere, disporre, costruire, classificare, contare e elencare cose”, con varianti miranti a inserire quello che, anche rispetto ai problemi presentati sopra, resta fuori; qualche testo propone invece un più restrittivo “dimostrare l’esistenza di un oggetto (di un certo tipo), costruirlo, contare quanti ce ne sono, trovare il migliore”.

I primi esempi di questioni che ora si chiamano combinatorie si fanno risalire alla Cina e all’India di tremila anni fa; nel Medio Evo e Rinascimento europeo si trovano solo problemi di conteggio di permutazioni e combinazioni di oggetti, mentre nel corso del tempo si sono accumulati rompicapo, curiosità, indovinelli, inizialmente ricreativi o apparentemente frivoli, poi confluiti nella combinatoria, come i conigli di Fibonacci, i ponti di Königsberg, il paradosso del compleanno, la Torre di Hanoi, il problema dei quattro colori. Ne citiamo due che sono esemplari per il modo come i nostri personaggi faranno riferimento alla combinatoria.

Il problema dei ponti di Königsberg (oggi Kaliningrad, exclave russa) chiede se sia possibile compiere una passeggiata che attraversa una sola volta ciascuno dei sette ponti sul fiume Pregel che uniscono due isole e le altre parti della città e tornare al punto di partenza.

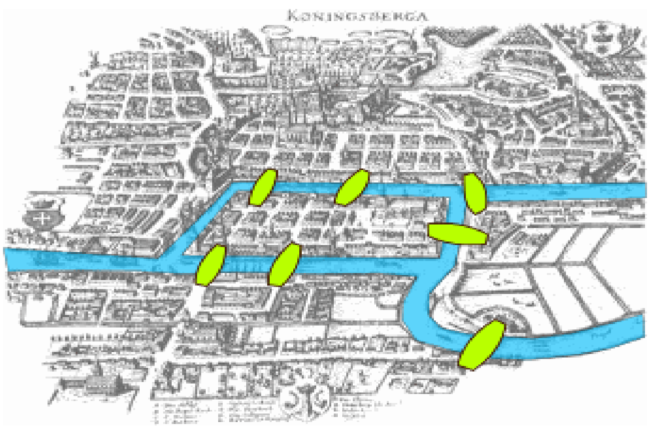

Figura 2: Königberg ai tempi di Euler con i ponti sul Pregel evidenziati.

Fu risolto negativamente da Leonhard Euler (1707-1783) nel 1735. L’interesse del caso non risiede nella risposta, che si potrebbe pure ottenere generando tutti i percorsi chiusi, che sono un numero finito, quanto nel fatto che Euler per la spiegazione formulò e usò una proprietà generale che segnò l’inizio della topologia (vedi titolo di [Euler 1735]) e in particolare della teoria dei grafi. La proprietà (dei grafi) chiede che da ogni nodo si dipartano un numero pari di archi

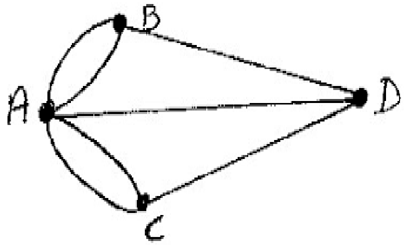

Figura 3: Grafo dei ponti di Königsberg

affinché possa esistere un circuito chiuso completo, cioè che contiene ogni arco una volta sola; nel grafo in figura gli archi rappresentano i sette ponti, e i nodi le quattro regioni collegate, A e D rispettivamente l'isola centrale e quella di destra, in riferimento alla Fig. 2, B la parte superiore della città e C la parte inferiore.

Tuttavia la dimostrazione in [Euler 1735] non fu espressa in termini di grafi; la parola, la rappresentazione (come in Fig. 3) e la teoria risalgono all'Ottocento per opera del fisico Gustav R. E. Kirchhoff (1824-1887) per lo studio dei circuiti elettrici e del matematico Arthur Cayley (1821-1895) per lo studio degli isomeri (molecole con le stesse proprietà chimiche, ma diverse proprietà fisiche). Euler indicava A, B, C, D le quattro parti della città e con parole come ABD il percorso che portava da A prima a B e poi a D, con l'inevitabile passaggio di un ponte tra A e B e di uno tra B e D; poi ABDC se il percorso si prolungava a C, con l'attraversamento di un altro ponte: "et si viator trans quocumque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui unitate est maior quam numerum pontium, denotabitur" (la lunghezza della parola che rappresenta un percorso è maggiore di uno del numero di ponti attraversati).

"Quaestio ergo huc reducitur, ut ex quatuor litteris A, B, C, D series octo litterarum formetur" nelle quali quelle successioni (che individuano ponti di collegamento) occorrano tante volte quanto è richiesto. Ma prima di dedicarsi a tale opera conviene mostrare se le lettere si possano disporre nel modo desiderato; perché "se si può dimostrare che è impossibile (omnino fieri non posse) risulta inutile ogni fatica rivolta a questo scopo". Inizia quindi a considerare la regione A con cinque ponti e osserva che in ogni percorso che li contempla tutti la lettera A deve occorrere tre volte, e se invece di cinque fossero un numero dispari n, come per B con tre, la lettera deve occorrere $\frac{n+1}{2}$ volte. Esaminando le varie eventualità per le altre regioni, ciascuna con tre ponti, e quindi due occorrenze della rispettiva lettera, in un'analisi che non riportiamo, anche perché nella prima versione non era veramente completa, conclude che la parola cercata dovrebbe avere lunghezza nove, non otto, quindi per i Regiomontani (abitanti di Königsberg, *Regiomons*) "huiusmodi transitus nequaquam fieri possit". Intendiamo segnalare unicamente che la dimostrazione era impostata come ricerca e costruzione di "parole", che sono per definizione liste di lettere di un alfabeto.

Il problema dei quattro colori chiede se una qualunque carta geografica con regioni connesse e senza exclavi può essere colorata con quattro soli colori, in modo che regioni adiacenti, cioè con almeno una linea di confine comune, non abbiano lo stesso colore. Fu posto da Francis Guthrie (1831-1899) nel 1852. Tutte le dimostrazioni ritenute corrette, anche per anni, furono alla lunga trovate carenti, fino a che nel 1977 Kenneth Appel (1932-2013) e Wolfang Haken (1928-) lo dimostrarono con l'uso essenziale del calcolatore.

Figura 4: Colorazione delle regioni italiane.

La parola "combinatoria" fu introdotta in matematica da Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nella *Dissertatio de Arte Combinatoria* del 1666 dove in copertina si dichiarava che da fondamenti aritmetici si proponeva di costruire una nuova dottrina *Complicationum ac Transpositionum*, di spargere *Logicae Inventionis Semina*, e anche di portare a *Demonstratio Existentiae Dei ad Mathematicam Certitudinem*. Qualche anticipazione è attribuita a Ramon Llull [Raimondo Lullo] (1232-1316) nella sua *Ars compendiosa inveniendi veritatem*, 1271, dove, supponendo di aver completato l'elenco di tutti i termini semplici, combinandoli in tutti i modi possibili si dovevano ottenere tutte le proposizioni vere.

Il recupero del termine nell'età contemporanea è proprio dovuto alla logica. Nel primo Novecento lo troviamo usato per significare calcoli formali (le *logisch-kombinatorische Untersuchungen* (1920) di un famoso articolo di Thoralf Skolem (1887-1963)) ma soprattutto le operazioni di sostituzione e di concatenazione di funzioni, i "livelli più semplici di attività matematica" le chiamava Beppo Levi nel 1934; queste sono diventate un capitolo della logica, la "logica combinatoria" (da non confondere con il più tardo uso del termine per indicare il funzionamento di circuiti elettrici con porte logiche); essa rappresenta e studia formalmente il procedimento di calcolo di una funzione matematica, dopo l'introduzione da parte di Moses I. Shönfinkel (1889-1942) di sistemi di operatori detti "combinatori", che si sono in seguito rivelati in grado rappresentare tutte le funzioni calcolabili in modo effettivo (cfr. nota 53 *infra*).

Un salto di qualità nell'interesse matematico dei problemi combinatori si è avuto da una parte con la considerazione di strutture infinite, che ha suggerito anche una definizione più vaga e generale della disciplina come "lo studio di strutture discrete finite o infinite numerabili" (ma la combinatoria infinita affronta anche insiemi più che numerabili), e dall'altra sotto lo stimolo delle esigenze dell'informatica e della disciplina degli algoritmi, soprattutto per la teoria della complessità. Per esempio, sono considerati efficienti gli algoritmi il cui tempo di esecuzione è proporzionale a una potenza del numero che misura la dimensione dell'input (ma in realtà sono efficienti solo quelli in cui la potenza ha esponente 1 o poco più); l'insieme dei problemi risolubili con tali algoritmi, chiamati polinomiali, è indicato con P. Con NP si indica l'insieme dei problemi risolubili con algoritmi non deterministici polinomiali, che ammettono la seguente più chiara caratterizzazione equivalente (anche se l'equivalenza non è immediata): sono i problemi tali che ogni possibile candidata alla risposta, se è data, può essere verificata o respinta in tempo polinomiale. La questione, aperta, se P = NP o no, è uno dei problemi del millennio del Clay Mathematical Institute.

I problemi combinatori più semplici sono quelli di conteggio; le operazioni aritmetiche della scuola materna (la *baby arithmetic*) sono introdotte per eliminare il modo di contare basato sull'elenco progressivo dei numeri, che è una prosecuzione del contare sulle dita; i primi strumenti meno elementari sono noti a molti, i cosiddetti coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$, che danno il numero delle combinazioni di n oggetti a k a k, o k alla volta (o altrimenti dei sottoinsiemi degli n oggetti con k elementi),

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k},$$

$k \leq n$, così detti perché compaiono come coefficienti dei termini $a^i b^j$ nella formula di sviluppo della potenza n-esima del binomio

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

e che sono raccolti nel triangolo di Pascal. Nel sesto secolo a. C. il medico Suśruta contava il numero di possibili combinazioni di sei medicine di base, a due a due o a tre a tre ecc. e conosceva diversi coefficienti binomiali; il triangolo di Pascal completo fu anticipato intorno al 1000 d. C. dall'arabo al Karajī e nel 1300 ca. in Cina da Zhu Shijie; Blaise Pascal (1623-1662) nel 1665 (postumo) spiegò i vari modi in cui il triangolo può essere generato.

Ma ci sono anche principi più astratti e generali, di grande utilità, per esempio il cosiddetto principio dei cassetti, che afferma che se se n oggetti sono posti in k cassetti, $k < n$, allora in qualche cassetto devono finire più oggetti (o anche: se più di nk oggetti sono posti in n cassetti, in almeno un cassetto finiscono più di k oggetti). Nonostante la formulazione casereccia, il principio è molto sottile e ha grande importanza in matematica, si tratta precisamente della definizione di insieme "finito" data da Richard Dedekind (1831-1916), e quindi per negazione di insieme "infinito".

Molte semplici formule dell'algebra degli insiemi, che paiono poco interessanti e utili, sono efficienti nei problemi di conteggio, per esempio

$$\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid - \mid A \cap B \mid,$$

dove $\mid X \mid$ è la cardinalità dell'insieme X, che si chiama pomposamente principio di inclusione-esclusione, o metodo di sovra- e sotto-conteggio. Per esempio: il nuovo insegnante di italiano chiede alla classe, per alzata di mano, "Chi la letto *La giornata di uno scrutatore*?"; 11 mani alzate; poi chiede "Chi la letto *Todo modo*?"; 4 mani alzate; può concludere che metà classe (15 allievi) ha letto uno dei libri di Calvino e Sciascia? No ovviamente, è anzi probabile, e magari se ne è accorto guardando chi alzava la mano, che chi ha letto Sciascia abbia letto anche Calvino; per una statistica precisa deve aggiungere una domanda: "Chi li ha letti entrambi?", e sottrarre il numero di risposte, perché se ce ne sono sono già state contate due volte. Se non conosce la formula del principio di inclusione-esclusione (meglio, la semplice idea che sta dietro) e vuole sapere quanti hanno letto uno di quei libri potrebbe chiedere "Chi ha letto uno tra *La giornata di uno scrutatore* e *Todo modo*?". Ma in questo caso è probabile che gli allievi non capirebbero la domanda, ambigua, con conseguenze disastrose sull'esito del sondaggio.

La formula si generalizza, complicandosi, a tre o più insiemi (questo amano fare i matematici), e il lettore può provare a trovarla nel caso almeno di tre insiemi, immaginando che l'insegnante voglia sapere quanti allievi abbiano letto uno tra Calvino, Sciascia e Primo Levi.

Ancora, la probabilità, soprattutto in spazi finiti di eventi, richiede essenzialmente conteggi, dei casi possibili e di quelli favorevoli, e ha bisogno di un arsenale di principi e formule di questo genere se si vuole andare oltre il contare sulle dita.

La matematica della combinatoria è ampia e dai confini indeterminati, praticamente in linea di principio include qualunque argomento. Per questo motivo molti (a parte gli specialisti del settore) preferiscono non usare tale parola e parlare più in generale di matematica discreta (*discrete mathematics*). Con questo termine si definisce un'area per contrapposizione alla matematica del continuo. Il concetto di continuo è stato oggetto di analisi fin dall'antichità (sempre Aristotele), e ancora oggi è oggetto di controversie, ma con matematica del continuo ci si riferisce a qualcosa di ben saldo e imponente, alla matematica basata sulla struttura dei numeri reali e complessi che nell'età moderna ha visto il trionfo e i successi dell'Analisi infinitesimale e di tutti i suoi capitoli (equazioni differenziali, analisi funzionale, ...). Essa, ancora nella prima parte del secolo scorso, plasmava anche la tecnologia più avanzata: telefoni, televisione, radio, e dischi di vinile funzionavano in base a una strumentazione analogica; erano cioè tutti dispositivi o congegni che erano costruiti e funzionavano secondo leggi fisiche che si manifestavano in fenomeni trattati come continui dalla matematica. La rivoluzione che abbiamo vissuto è stato il passaggio dall'analogico al digitale. La matematica discreta, come abbiano accennato prima, è stata non solo lo strumento operante con discrezione dietro le quinte, ma la sostanza e il simbolo di tale transizione. Non solo argomenti e strumenti nuovi, ma anche classici "discretizzati", per esempio invece delle equazioni differenziali le equazioni alle differenze finite.

Vedremo, nel capitolo 6, che Calvino è ben consapevole dal suo osservatorio di tale rivoluzione in corso (ma oramai si può dire vittoriosa), e dà la definizione corretta di "discreto", in opposizione a "continuo", anche se poi usa il termine "combinatoria" in un senso più generico e nello stesso tempo più ristretto, quasi esclusivamente riferito alle combinazioni, soprattutto per la produzione di parole (quindi ponendosi in contesti infiniti, come sono i linguaggi). Inoltre enfatizza soprattutto il carattere effettivo, meccanico, delle operazioni generatrici, giustificato in questo come vedremo dalle solite avventure delle parole, che hanno riguardato anche "combinatoria". Quando parla di "processo combinatorio" Calvino ha in mente come modello un processo automatico di generazione e trasformazione di parole.

Il fascino che la matematica esercita sui letterati è quello del discreto; i filosofi invece sono maggiormente attratti dalla formazione dei concetti piuttosto che delle parole, dalle incursioni nel mondo platonico delle idee, dall'addomesticamento dell'infinito attuale, anzi degli infiniti, imprese titaniche che conferiscono alla matematica un'apparente somiglianza con le presunzioni della metafisica.

a–n–a–l–i–t–i–c–a

L'elenco completo delle pubblicazioni
è consultabile sul sito

www.edizioniets.com

alla pagina

http://www.edizioniets.com/view-Collana.asp?col=Analitica

Pubblicazioni recenti

18. Gabriele Lolli, *Il fascino discreto della matematica. Calvino, l'Oulipo e Bourbaki*, 2021, pp. 156
17. Ludovica Conti, *Paradosso di Russell e programmi astrazionisti. Spiegazioni e soluzioni a confronto*, 2020, pp. 256
16. Rossella Lupacchini, *Nella mente della natura. La scienza della luce e la dottrina delle ombre*, 2020, pp. 200
15. Luca Bellotti, Luca Gili, Enrico Moriconi, Giacomo Turbanti (eds.), *Third Pisa Colloquium in Logic, Language and Epistemology. Essays in Honour of Mauro Mariani and Carlo Marletti*, 2019, pp. 408
14. Carlo Gabbani, *Realismo e antirealismo scientifico. Un'introduzione*, 2018, pp. 180
13. Hykel Hosni, Gabriele Lolli, Carlo Toffalori (a cura di), *Le direzioni della ricerca logica in Italia 2*, 2018, pp. 440
12. Mauro Mariani, *Logica modale e metafisica. Saggi aristotelici*, 2018, pp. 384
11. John Stillwell, *Da Pitagora a Turing. Elementi di filosofia nella matematica*. A cura di Rossella Lupacchini, 2018, pp. 192
10. Ettore Casari, *La logica stoica*. A cura di Enrico Moriconi, 2017, pp. 124
9. Enrico Moriconi and Laura Tesconi (eds.), *Second Pisa Colloquium in Logic, Language and Epistemology*, 2014, pp. 376
8. Wilfrid Sellars, *L'immagine scientifica e l'immagine manifesta*. Raccolta di testi a cura di Carlo Marletti e Giacomo Turbanti, 2013, pp. 574
7. Luca Tranchini, *Proof and Truth. An anti-realist perspective*, 2013, pp. 176
6. Laura Tesconi, *Essays in Structural Proof Theory*, 2013, pp. 134
5. Luca Bellotti, *What is a model of axiomatic set theory?*, 2012, pp. 188
4. Lolli Gabriele, *La guerra dei Trent'anni (1900-1930). Da Hilbert a Gödel*, 2011, pp. 242
3. Marletti Carlo (ed.), *First Pisa Colloquim in Logic, Language and Epistemology*, 2010, pp. 190
2. Moriconi Enrico, *Strutture dell'argomentare*, 2009, pp. 176
1. Bellotti Luca, *Teorie della verità*, 2008, pp. 140

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com
Finito di stampare nel mese di gennaio 2021