a–n–a–l–i–t–i–c–a

17

Analitica propone una serie di testi
– classici, monografie, strumenti antologici e manuali –
dedicati ai più importanti temi della ricerca filosofica,
con particolare riferimento alla logica, all'epistemologia
e alla filosofia del linguaggio.
Destinati allo studio, alla documentazione e all'aggiornamento critico,
i volumi di Analitica intendono toccare sia i temi istituzionali
dei vari campi di indagine, sia le questioni emergenti collocate
nei punti di intersezione fra le varie aree di ricerca.

Ludovica Conti

Paradosso di Russell e programmi astrazionisti

Spiegazioni e soluzioni a confronto

anteprima
visualizza la scheda del libro su www.edizioniets.com

Edizioni ETS

www.edizioniets.com

Pubblicato con un contributo dell'Università di Pavia
Dipartimento di Studi Umanistici

Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884675883-5

Paradosso di Russell e programmi astrazionisti

Spiegazioni e soluzioni a confronto

Questo libro è il risultato della rielaborazione della mia tesi di dottorato. Colgo l'occasione della pubblicazione per ringraziare il Consorzio di Filosofia del Nord Ovest (FINO), che mi ha dato l'opportunità di condurre la ricerca di cui presento i risultati. Ringrazio, in particolare, l'Università di Pavia, che è stata il mio punto di riferimento durante il dottorato e che ha consentito la pubblicazione di questo volume.

Vorrei inoltre ringraziare tutte le persone che hanno contribuito alla realizzazione di questo progetto, iniziando dai supervisori della tesi, ai quali devo le parti migliori di questo libro e della mia formazione.

Ringrazio Tommaso Piazza, per aver partecipato a tutte le fasi di ideazione, elaborazione e revisione di questo testo. Lo ringrazio per avermi accompagnata, tra i tanti ripensamenti e i piccoli progressi, dal primo progetto al primo *talk*, dalla prima all'ultima pagina di questo libro.

Devo un ringraziamento speciale a Francesca Boccuni, per avermi trasmesso l'interesse per questi argomenti e per essere intervenuta nel momento più difficile: la sua guida mi ha dato il coraggio di iniziare a scrivere e ha reso possibile – ed entusiasmante – il percorso riassunto in questo libro.

Ringrazio inoltre Andrea Sereni, per aver letto e commentato una precedente versione di questo testo. Ringrazio Salvatore Florio e tutte le persone con cui, in varie occasioni, ho avuto la fortuna di confrontarmi su questi temi. Vorrei rivolgere un ringraziamento particolare a Marco Panza, per i suoi preziosi consigli e per la nostra inesauribile discussione, che ha attraversato – oltre all'oceano – le varie stesure di questo testo.

Pensando alla revisione finale che ha condotto a questa pubblicazione, aggiungo un ringraziamento personale ai miei genitori, per la pazienza di questi ultimi mesi di imprevista convivenza: non sanno dell'esistenza di questo libro e non immaginano il sostegno che per me significa la loro presenza.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Analisi e soluzione del paradosso

In questo libro verrà analizzato il paradosso di Russell, alla luce delle spiegazioni e delle soluzioni che ne sono state fornite in ambito astrazionista.

Con il termine *paradosso* ci riferiamo solitamente a un argomento il cui segno distintivo è una conclusione inaccettabile e imprevista, raggiunta mediante un ragionamento ritenuto valido, a partire da premesse note e precedentemente ammesse. Senza affrontare il compito complesso di definire in modo più preciso tale fenomeno nella sua generalità[1], in questa sede possiamo circoscrivere la nozione di paradosso agli argomenti riducibili alla derivazione sintattica di una contraddizione. Restringere la nostra definizione in modo da selezionare tale sottoinsieme degli argomenti paradossali risulta utile non solo per attingere informazioni pertinenti al paradosso di Russell, ma anche per delineare i confini di una possibile generalizzazione dei risultati che verranno presentati relativamente a questo singolo caso. Il vantaggio informativo più evidente consiste nella possibilità di ridurre l'eterogeneità delle condizioni necessarie per la conclusione problematica – assiomi, regole inferenziali e definizioni più o meno formali[2] – a premesse sintattiche e quindi esplicitabili entro la teoria in cui il paradosso si manifesta[3].

[1]Per alcune definizioni più generali della nozione di paradosso, cfr. Sainsbury 1995 e Cook 2013.

[2]La tripartizione menzionata – definizioni, assiomi e regole d'inferenza – è esaustiva delle condizioni che verranno menzionate nel corso del libro come argomenti delle proposte esplicative e delle correzioni risolutive analizzate. Si ritiene inoltre molto probabile che rimanga esaustiva nel caso di dibattiti su qualunque fenomeno paradossale riconducibile alla derivazione logica di una contraddizione.

[3]Se si ammette una definizione più ampia di paradosso, si è costretti a distinguere

Nonostante l'apparente semplicità dell'identificazione di questa categoria di paradossi (sintattici), una difficoltà preliminare investe la precisa delimitazione dell'oggetto di spiegazione e soluzione. Sono infatti disponibili alternativi percorsi derivazionali che, utilizzando premesse differenti di una stessa teoria, conducono alla medesima conclusione. Per superare quest'ambiguità e distinguere una derivazione meramente legittima di una contraddizione, da una che efficacemente funga da oggetto di spiegazione, seguiremo nuovamente un criterio sintattico: considereremo, come derivazione utile a scopi esplicativi, la *derivazione minima* di una data contraddizione, ossia la derivazione costituita dalle sole premesse singolarmente necessarie e congiuntamente sufficienti per la conclusione – presenti (anche solo implicitamente) in ogni sistema in cui sia riproducibile il paradosso in esame.

Anche per quanto concerne le nozioni di *spiegazione* e *soluzione*, è corretto segnalare una distanza tra l'accezione in cui verranno impiegate in questo libro e quella solitamente loro associata, che le vede riferite a due compiti non necessariamente connessi. Secondo quest'accezione più vaga, l'obiettivo di analizzare in che modo e perché un principio apparentemente legittimo di una teoria implichi conseguenze che contraddicono assunzioni fondamentali di quella stessa teoria non necessariamente impegna nella proposta di una correlata soluzione; viceversa, una correzione tecnica che eviti la contraddizione – secondo quest'accezione – può essere perseguita senza accogliere una precedente spiegazione della sua origine. Tale separazione tra il compito di spiegare e quello di risolvere una contraddizione ha favorito lo sviluppo di aree quasi indipendenti del dibattito sul paradosso di Russell[4].

In questo libro ci si pone tuttavia l'obiettivo di stabilire, tra le nozioni di spiegazione e soluzione, una relazione essenziale, restringendo esplicitamente le loro stesse definizioni in modo che si implichino reciprocamente. Si ricostruiranno dunque, se necessario, spiegazioni implicite nelle correzioni già perseguite e si proporranno soluzioni nuove, come conseguenze coerenti di ipotesi esplicative autonomamente avanzate.

Spiegare la contraddittorietà della conclusione di un argomento paradossale, nell'accezione scelta, presuppone anzitutto di ricostruirne la *derivazione*

---

spiegazioni differenti in base alla tipologia di condizione prescelta come rilevante per la conclusione. L'origine del paradosso deve quindi essere alternativamente cercata, ad esempio, nelle premesse derivazionali, nel ragionamento adottato, nell'implicito presupposto della inaccettabilità di una contraddizione o nella definizione di uno o più dei concetti coinvolti. Per un'analisi di tale ampiezza, cfr. Cook 2013.

[4]Per il dibattito sull'origine del paradosso, ad esempio, cfr. Dummett 1991; Boolos 1993; Dummett 1993a; Paseau 2015; Uzquiano 2019. Tra le correzioni proposte senza aderire a una precisa spiegazione della contraddizione, ad esempio, cfr. Schroeder-Heister 1987, Parsons 1987, Heck 1996, Wehmeier 1999, Ferreira e Wehmeier 2002, Ferreira 2005.

minima e consiste nell'individuare sia la condizione che ne è ritenuta l'origine sia il difetto che tale condizione esprime. Una spiegazione deve infatti essere in grado di fornire un'istruzione completa per la soluzione del paradosso, indicando non solo su quale condizione (assioma, regola d'inferenza o definizione) intervenire, ma anche il tipo di modifica da apportare. L'apparente liceità delle condizioni e il fatto che la loro eventuale problematicità venga segnalata solo dalla comparsa della contraddizione rendono tuttavia non ovvia e non univoca la loro individuazione.

Una volta ricostruita la struttura sintattica (*minima*) dell'argomento paradossale, la spiegazione deve essere formulata come la congiunzione di due tesi, rispettivamente concernenti (Tesi I) la selezione di una delle condizioni necessarie e – quale argomento in favore di tale selezione – (Tesi II) l'individuazione del difetto di cui è espressione. A supporto di questa seconda tesi esplicativa, possono, a loro volta, essere invocate argomentazioni di differente natura (semantica, epistemica, pragmatica, ...) a seconda del principio discusso e del difetto individuato.

È possibile segnalare alcuni obiettivi sintattici generali che ogni spiegazione deve perseguire. Il primo obiettivo consiste nella selezione del difetto (di un particolare principio) la cui sola correzione sia sufficiente a ripristinare la consistenza. Il secondo obiettivo consiste nell'individuazione del difetto la cui correzione meno indebolisca il potere deduttivo che avrebbe avuto il sistema originario, qualora consistente. Pur richiedendo una valutazione sintattica delle rispettive capacità derivazionali dei sistemi ottenuti, il secondo obiettivo contiene un'evidente motivazione filosofica. Ad esempio, nel caso del paradosso di Russell, alcuni dei sistemi in cui la contraddizione è derivabile sono stati elaborati con l'esplicita ambizione di ricostruire l'aritmetica; l'attribuzione di inconsistenza a un principio, preludendo alla sua esclusione o restrizione, non può quindi prescindere dalla valutazione dell'eventuale compromissione di quel risultato fondazionale.

Il successo della ricostruzione sintattica della *derivazione minima*, ossia l'individuazione di una derivazione non solo adeguata alla conclusione contraddittoria ma contenente solo principi necessari, è ovviamente condizione dell'efficacia della spiegazione – pur non offrendo alcuna indicazione utile per la soluzione e dunque non determinando una specifica proposta esplicativa. Le due tesi in cui si è scomposta la spiegazione sono invece entrambe essenziali alla caratterizzazione di una proposta e sono di solito discusse congiuntamente, considerando la seconda come il principale argomento in favore della prima. Tali tesi restano comunque teoricamente indipendenti: l'identificazione di una premessa esplicativamente rilevante (Tesi I) non determina l'individuazione di uno specifico difetto (Tesi II), né viceversa. Si presenteranno infatti molti esempi di spiegazioni che condividono la prima tesi, ossia l'identificazione di una certa premessa problematica, differendo tuttavia nell'individuazione del loro difetto; viceversa, si presenteranno anche soluzioni in cui un comune difetto viene localizzato in differenti premesse.

È evidente che sia la presupposta ricostruzione della derivazione sia le due tesi sono indispensabili al successo di una spiegazione, che può quindi fallire per almeno tre ragioni: nel selezionare (preliminarmente), come necessarie, premesse che non lo sono; nell'indicare (Tesi I), come esplicativamente rilevante, una premessa, pur necessaria, che non lo sia; infine (Tesi II), nell'identificare correttamente una premessa necessaria ed esplicativamente rilevante, ma fraintendendone il difetto.

Nonostante l'apparente familiarità, anche la nozione di *soluzione* necessita, in questo contesto, di alcune precisazioni. Avendo circoscritto l'indagine alla *derivazione minima*, è ovvio che la rinuncia a una qualsiasi delle condizioni singolarmente necessarie è sufficiente a impedire la derivazione di una contraddizione e che tale fine è parimenti perseguibile attraverso molteplici (legittime) restrizioni di ciascuna condizione. Si intenderanno tuttavia, come *soluzioni* del paradosso, solo le correzioni del difetto – di volta in volta – ritenuto responsabile della contraddizione, ossia le strategie chiaramente riconducibili a una – seppur implicita – spiegazione. Come anticipato nella definizione del compito esplicativo, sarà inoltre impossibile prescindere dalla considerazione del risultato matematico che tali soluzioni permettono di raggiungere.

All'interno del dibattito sul paradosso di Russell, le soluzioni vengono solitamente classificate (evidenziando la Tesi I della corrispondente spiegazione) in base al principio alterato oppure (privilegiando la Tesi II) in base al tipo di correzione apportata. Parallelamente a quanto anticipato per le spiegazioni, si riterrà invece che una specifica soluzione sia propriamente individuata da entrambi i criteri, in modo da ribadirne la subordinazione alle relative (complessive) proposte esplicative.

L'articolazione delle nozioni di spiegazione e soluzione di un paradosso costituirà dunque il presupposto per isolare, presentare e confrontare tre differenti letture del paradosso di Russell (rispettivamente relative all'iniezione, alla comprensione e all'astrazione,) cui sembra possibile ricondurre la maggior parte delle strategie esplicative e risolutive proposte nel dibattito astrazionista.

1.2 Il paradosso di Russell

1.2.1 Il paradosso di Russell – versioni informali

Come anticipato, la spiegazione e la soluzione di un paradosso concernono (e dunque presuppongono l'identificazione di) un particolare elemento sintattico, ossia la *derivazione minima* della contraddizione. Prima di ricostruire tale derivazione – che rimarrà l'oggetto d'indagine dell'intero libro – può tuttavia essere utile premettere una presentazione informale e *generale* dell'argomento paradossale, in modo da individuarne con più chiarezza i tratti essenziali e poterli utilizzare per una prima identificazione delle spiegazioni e delle relative soluzioni[5]. Di questo argomento paradossale *generale*, confronteremo inoltre, sempre a scopo introduttivo, tre esemplificazioni informali particolari – *cantoriana*, *russelliana* e *fregeana* – ritenute sue espressioni emblematiche, sia nel senso di comparire più frequentemente nella letteratura sia nel senso di fungere da prototipo di molte altre versioni ad esse riducibili[6].

Si può affermare che, nella sua caratterizzazione *generale*, il paradosso di Russell concerne specifiche entità (insiemi, predicati, concetti) – passibili di definizione – la cui identità è fissata nei termini di una relazione rilevante – inclusione[7], predicazione, applicazione – indistintamente definita sull'intero e unico dominio di cui tali entità fanno parte: tale relazione non gode né della proprietà riflessiva né della proprietà irriflessiva, ma può essere legittimamente intrattenuta da alcuni elementi del dominio considerato con se stessi. L'argomento prevede la definizione di una particolare entità di questo tipo (il concetto, l'insieme o il predicato *russelliano*), la cui condizione di specificazione consiste nel non intrattenere con se stessa la relazione rilevante.

[5]In questa valutazione preliminare, si cercherà di distinguere le spiegazioni e le soluzioni basate su aspetti rilevanti dell'argomento paradossale, da quelle che sembrano invece suggerite da aspetti specifici delle varie presentazioni – motivando in tal modo la loro inefficacia esplicativa e risolutoria.

[6]Tale esemplificazione non ha comunque alcuna pretesa di esaustività ma solo l'obiettivo di semplificare il confronto tra la versione che verrà analizzata nel dettaglio e altre sue possibili presentazioni: l'obiettivo può essere considerato raggiunto se da tale confronto emergono le condizioni che caratterizzerebbero qualsiasi altra versione del medesimo paradosso.

[7]Si intende l'inclusione $\ni$ come la relazione inversa dell'appartenenza insiemistica $\in$.

Riprendendo una distinzione che Frege[8] evidenzia per i concetti[9], si può dire che la *condizione di specificazione*[10] dell'entità russelliana – ossia non intrattenere la relazione rilevante con se stessi – sia la *proprietà* distintiva di tutti gli elementi con cui invece l'entità russelliana intrattiene quella stessa relazione. La possibilità che tale relazione sia intrattenuta da un elemento con se stesso consente tuttavia di chiedersi se tale proprietà valga per l'entità russelliana stessa, ossia se la negazione della relazione rilevante valga, per quest'ultima, oltre che come condizione di specificazione, anche come proprietà[11]. La conclusione paradossale segue dalla constatazione che – proprio perché tale condizione consiste nella negazione della relazione rilevante – se l'entità russelliana gode di tale condizione come proprietà non può soddisfarla come condizione di specificazione e, viceversa, se la soddisfa come condizione di specificazione, non può goderne come proprietà.

Possiamo dunque individuare almeno due aspetti necessari e congiuntamente problematici di questa struttura argomentativa: una peculiare condizione di specificazione – fornita nei termini di negazione della relazione rilevante – e la possibilità di quest'ultima di intervenire anche tra un elemento e se stesso. La rilevanza di tali elementi è confermata dalla loro presenza nelle tre versioni informali menzionate.

Nella versione *cantoriana*, formulabile in una teoria ingenua degli insiemi, tale paradosso presuppone di avere un unico tipo di variabili e, come relazione rilevante, l'inclusione[12]; da un punto di vista semantico, questo vocabolario è interpretato su un unico dominio di elementi omogenei, ciascuno dei quali può appartenere a qualunque altro. Con queste premesse è possibile definire un elemento (classe o insieme) utilizzando, come condizione di inclusione, la non inclusione in se stessi ($\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \notin y)$). La condizione di non auto-inclusione individua dunque, quale soggetto della relazione, l'insieme i cui membri sono tutti e soli gli insiemi che non sono inclusi in se stessi. In

[8] Le opere di Frege verranno citate ricorrendo alle convenzioni adottate in letteratura. In particolare, si utilizzerà la sigla *GLA*, per indicare le *Grundlagen der Arithmetik* (cfr. Frege 1884 e trad. it. in Frege 1950 e Frege 2019) e la sigla *GGA*, per indicare i due volumi dei *Grundgesetze der Arithmetik* (cfr. Frege 1903 e trad. it. in Frege 2013).

[9] Cfr. *GLA*, par. 53.

[10] In questo contesto, la nozione di specificazione ha una connotazione non metafisica ma semantica: le condizioni di specificazione sono le condizioni che consentono di fissare il riferimento di un termine a un'entità. Il termine "condizioni di specificazione", volutamente generico, viene usato per riassumere le condizioni di inclusione per gli insiemi, di predicazione per i predicati e di applicazione per i concetti.

[11] Ci si chiede dunque se lo stesso insieme/predicato/concetto (che include/si predica/si applica a tutti e soli gli elementi che non includono/si predicano/si applicano a se stessi) (non) includa/si predichi/si applichi a se stesso.

[12] Cfr. nota 7.

secondo luogo, in virtù della potenziale riflessività della relazione rilevante, è legittimo interrogarsi sulla sua inclusione in se stesso: la valutazione relativa all'inclusione di tale insieme in se stesso conduce direttamente alla contraddizione.

La versione *russelliana*[13], formulata in termini di predicati, presuppone di considerare le sole variabili predicative e di utilizzare la relazione di predicazione come relazione rilevante. Con queste premesse è possibile definire un predicato utilizzando, come sua condizione di specificazione, ossia di predicazione, la non predicabilità di se stessi. La condizione di non auto-predicazione individua in questo caso, quale soggetto della relazione di predicazione, il predicato predicabile di tutti e soli i predicati che non si predicano di se stessi. In secondo luogo, in virtù della potenziale riflessività della relazione rilevante, è legittimo interrogarsi sulla possibilità che il predicato appena definito sia oggetto di altre predicazioni, compresa la propria: la valutazione della disponibilità o meno di tale predicato a essere oggetto della propria predicazione conduce direttamente alla contraddizione.

Gli elementi strutturali inizialmente presentati ricorrono dunque in queste versioni del paradosso in modo esplicito. In primo luogo, viene definita un'entità la cui condizione di specificazione (inclusione/predicazione) – intesa come proprietà degli oggetti con cui intrattiene la relazione rilevante – contenga la negazione della stessa inclusione/predicazione. In secondo luogo, tale relazione è potenzialmente riflessiva, quindi si conferma il duplice ruolo che l'entità russelliana deve poter svolgere nei suoi confronti: nella teoria ingenua degli insiemi, l'insieme russelliano è al contempo collezione di elementi e membro di collezione; nella versione russelliana, il predicato russelliano è al contempo soggetto e oggetto di predicazione.

Nella presentazione *fregeana*[14] del medesimo paradosso, l'entità russelliana appartiene invece alla categoria dei concetti, intesi come funzioni, ossia

[13]Cfr. Russell 1903; Cocchiarella 1992.

[14]Come versione *fregeana*, si intende una presentazione aderente al sistema fornito da Frege nei *Grundgesetze*, che può dunque essere considerata traduzione informale della *derivazione minima* (cfr. paragrafo 1.2.2) che fungerà da oggetto di studio nel seguito del libro. Tale versione informale è riassunta, dallo stesso Frege, in *GGA*, *Appendice*: "Let us now focus on the concept class that does not belong to itself. The extension of this concept, if it is permissible to speak of it, is accordingly the class of those classes that do not belong to themselves. We will call it the class K for short. Let us now ask whether this class K belongs to itself. Let us first assume that it does. If something belongs to a class, then it falls under the concept whose extension the class is. So if our class belongs to itself, then it is a class that does not belong to itself. Our first assumption thus leads to a contradiction with itself. But if, alternatively, we assume that our class K does not belong to itself, then it falls under the concept of which it is itself the extension, and thus does belong to itself. Thus again a contradiction!".

come entità *insature* che non possono essere, a loro volta, argomento di altre funzioni del medesimo livello[15]. In particolare, nella versione *fregeana* di cui si sta parlando[16] – l'entità russelliana è un concetto di primo livello, ossia un tipo particolare di funzione da oggetti a valori di verità. Dal momento che i concetti possono intrattenere la relazione rilevante di applicazione unicamente con i loro argomenti, in questo caso, tale relazione sarà indicata come "applicazione oggettuale"[17].

Tale concezione dei concetti sembrerebbe imporre la rinuncia, almeno, al requisito di potenziale riflessività della relazione. Frege introduce tuttavia entità del primo ordine peculiari, ossia i *decorsi di valore* (o *estensioni*[18]) dei concetti, da essi ottenuti per astrazione, quali loro correlati oggettuali: la correlazione tra concetti e astratti risulta la traduzione dei ruoli, relativi alla relazione rilevante, precedentemente affidati all'unica entità russelliana. Tale correlazione prevede infatti non solo un requisito quantitativo – essendo biiettiva e dunque richiedendo che vi siano tanti oggetti astratti quanti concetti – ma anche un requisito identitario, fornendo le condizioni di identità di ciascun astratto corrispondente a un concetto nei termini dell'equivalenza di quel concetto con se stesso.

Superata questa apparente difformità, la versione *fregena* prosegue in modo analogo alle precedenti. La definizione del concetto russelliano prevede

---

[15]Cfr. Frege 1891 (trad. in Frege 2007).

[16]Come anticipato (cfr. nota 14), la versione *fregeana* è una presentazione informale corrispondente al sistema dei *Grundgesetze*. Sempre riferendosi a Frege, si potrebbero tuttavia formulare versioni, formali e informali, aderenti al sistema presentato da Frege nelle *Grundlagen*. Per una ricostruzione formale di questa variante, cfr. Boolos 1986.

[17]Frege distingue concetti di differenti livelli, stabilendo che ciascuno si applichi a entità del livello immediatamente precedente – utilizzando quindi differenti relazioni rilevanti. Nella versione *fregeana* qui analizzata (cfr. nota 14), il concetto di Russell viene definito (seguendo i *Grundgesetze*) come concetto di primo livello, quindi come concetto che intrattiene la relazione rilevante di applicazione con oggetti. Nella menzionata versione alternativa (cfr. nota 16), dunque seguendo le coordinate delle *Grundlagen*, il concetto di Russell è invece definito come concetto di secondo livello, quindi come concetto che intrattiene la relazione rilevante di applicazione con i concetti di primo livello.

[18] I due termini verranno intesi come sinonimi perché, nel dibattito di cui ci si occupa, la loro differenza non è rilevante. Nel caso dei concetti, il decorso di valori è assimilabile all'insieme delle coppie formate dagli argomenti e dai valori di una funzione caratteristica, ossia comprende sia gli argomenti cui il concetto assegna valore vero (l'estensione, in un'accezione intuitiva e tradizionale) sia quelli cui il concetto assegna il valore falso. Si sottolinea che questa accezione del termine *estensione* – come sinonimo del termine "decorso di valore" – verrà ritenuta standard nel corso del libro. Si anticipa che verranno tuttavia occasionalmente associate al termine "estensione" (e, in particolare, agli aggetti derivati, "estensionale" ed "estensionalista") altre due nozioni. Cfr. note 35 e 51. Qualora non sia chiaro dal contesto, queste accezioni secondarie verranno segnalate e chiarite.

che tale concetto si applichi ai correlati astratti di tutti e soli i concetti che non si applicano al proprio. La decisione sulla applicabilità o meno di tale concetto al proprio correlato astratto conduce indirettamente – sotto l'assunzione che ogni concetto abbia un unico specifico correlato astratto – alla contraddizione.

Gli elementi strutturali inizialmente indicati risultano dunque entrambi presenti anche nella versione *fregeana*. In primo luogo, la potenziale riflessività della relazione rilevante e dunque la dualità dei ruoli dell'entità russelliana è solo apparentemente risolta nella distinzione tra concetto e relativo oggetto astratto, mentre è efficacemente conservata dall'esistenza di una specifica correlazione biiettiva tra essi. In secondo luogo, la nuova condizione di specificazione ripropone la medesima negazione della relazione rilevante, solo articolandola tra le entità che ne sono i nuovi *relata*: la condizione secondo cui un'entità non intrattiene la relazione rilevante con se stessa si traduce nella condizione secondo cui un concetto non intrattiene la relazione rilevante con l'oggetto da lui ottenuto per astrazione.

Questa analisi di differenti versioni informali del paradosso di Russell ci consente di individuare almeno alcuni requisiti generali che spiegazioni e soluzioni dovrebbero soddisfare.

In primo luogo, è lecito aspettarsi che le spiegazioni si concentrino sugli elementi comuni a tutte le versioni citate, ossia sulla definizione di un'entità russelliana come entità che intrattiene la relazione rilevante con tutte e sole le entità che non intrattengono tale relazione nei confronti di sé stesse e sulla caratteristica, ascritta a tale relazione, di essere potenzialmente riflessiva. Tali spiegazioni, a loro volta, sembrano suggerire precise direttive risolutive: per un verso, imporre restrizioni sulla specificazione dell'entità russelliana, d'altro canto, regimentare la relazione rilevante. In entrambi i casi, la soluzione è efficace nella misura in cui riesce a prevenire l'ambivalenza evidenziata tra condizione di specificazione e proprietà dell'entità russelliana.

Sebbene i due tipi di soluzione possano integrarsi o addirittura confondersi, le spiegazioni rimangono distinte: per un verso, il difetto è ascritto a un certo tipo (intuitivamente circolare) di specificazione, ossia al fatto che l'entità russelliana venga individuata ponendo una condizione che si applica all'intera categoria di cui essa fa parte; d'altro canto, si contesta l'ambivalenza di uno stesso elemento (compresa la coppia fregeana concetto-estensione) usato come soggetto e oggetto della relazione rilevante, ossia la mancata limitazione dell'estensione di tale relazione.

Se si restringe l'attenzione alla sola versione informale *fregeana* del paradosso di Russell, queste opzioni si ripropongono in versioni più complesse, che devono tenere conto della separazione dei ruoli di concetti ed estensioni e, al contempo, dei problemi connessi alla loro relazione (fregeanamente funzionale e iniettiva). Una direzione esplicativa continua a individuare nella specificazione (latamente circolare) del concetto russelliano il difetto originario del paradosso. D'altro canto, venuta meno la possibile riflessività della relazione rilevante e dunque l'esplicita sovrapposizione di due ruoli su un unico elemento, la direzione esplicativa che individuava in tale caratteristica l'origine della contraddizione, si concentra invece sulla relazione che continua a sussistere tra i due poli in cui quei ruoli sono stati distinti, ossia sulla correlazione (denotata dall'operatore di astrazione) tra concetti ed estensioni. La formulazione di questa seconda direzione esplicativa che più fedelmente rispecchia l'analisi generale individua il difetto della correlazione nella universalità della sua applicazione, ossia nel consentire a ogni concetto di avere un'estensione.

1.2.2 Il paradosso di Russell – *derivazione minima*

Avendo in mente la versione *fregeana* del paradosso di Russell, possiamo introdurne, quale traduzione formale, la *derivazione minima* – che costituirà l'oggetto di indagine e dunque il presupposto comune di tutte[19] le spiegazioni e soluzioni che verranno discusse.

Tale derivazione è formulata in una teoria – che indicheremo come *Teoria fregeana* (T_F) – dimostrabilmente equivalente a quella proposta da Frege nei *Grundgesetze*[20]. Tale teoria utilizza un linguaggio (L_F) costituito dal vocabolario standard della logica del secondo ordine[21] e un operatore d'astrazione ϵ (che vincola costanti e variabili del secondo ordine per formare termini singolari complessi[22]). T_F consiste in un sistema assiomatico formato

[19] Anche le eventuali eccezioni saranno discusse prendendo come riferimento la *derivazione minima*. Cfr. capp. 2 e 3.

[20] Cfr. Boolos 1990.

[21] Il linguaggio L_F di questa teoria comprende quindi i seguenti simboli primitivi: una serie infinita numerabile di variabili del primo ordine x, y, z, ...; una serie infinita numerabile di variabili del secondo ordine a n posti X^n, Y^n, Z^n, ...; i connettivi logici $\neg, \wedge, \vee$ (con cui si definiscono anche $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$); la costante relazionale di identità (ristretta ad argomenti del primo ordine); un quantificatore esistenziale $\exists$ sia per variabili del primo sia per variabili del secondo ordine (con cui si definisce un corrispondente quantificatore universale $\forall$).

[22] In una versione alternativa di tale linguaggio, l'operatore d'astrazione può vincolare formule aperte contenenti variabili libere del primo ordine. La differenza tra questi due usi dell'operatore d'astrazione si riflette nella formazione dei termini singolari complessi e, dato che tali termini compaiono nel principio d'astrazione, nell'alternativa tra la versione assiomatica e schematica di quest'ultimo. Cfr. nota 25.

dalla logica del secondo ordine (con uno schema di assiomi di comprensione), da un principio non logico, *Basic Law V* e dal *Modus Ponens*, come regola d'inferenza.

Paradosso di Russell [*derivazione minima*]:

1. $\forall X \forall Y(\epsilon X = \epsilon Y \leftrightarrow \forall x(Xx \leftrightarrow Yx))$	(BLV)
2. $\exists X \forall x(Xx \leftrightarrow \exists Y(x = \epsilon Y \wedge \neg Yx))$	(AC)
3. $\forall x(Rx \leftrightarrow \exists Y(x = \epsilon Y \wedge \neg Yx))$	(def. R)
4. $\exists x(x = \epsilon R)$	(2, TEE)
5. $\neg R \epsilon R$	(A)
6. $R \epsilon R$	(2,5)
7. $\neg R \epsilon R \rightarrow R \epsilon R$	(5,6)
8. $R \epsilon R$	(5,7)
9. $\exists Y(\epsilon R = \epsilon Y \wedge \neg Y \epsilon R)$	(2,8)
10. $\neg R \epsilon R$	(1,9)
11. $R \epsilon R \rightarrow \neg R \epsilon R$	(8,10)
12. $R \epsilon R \leftrightarrow \neg R \epsilon R$	(7,11)

Come si può osservare, tra le premesse esplicite della contraddizione, compaiono lo schema di assiomi di comprensione al secondo ordine non ristretto (AC: $\exists X \forall x(Xx \leftrightarrow \phi(x))$), il principio d'astrazione *Basic Law V* (BLV:$\forall X \forall Y(\epsilon X = \epsilon Y \leftrightarrow \forall x(Xx \leftrightarrow Yx))$) e un teorema sull'esistenza delle estensioni (TEE).

Lo schema di assiomi di comprensione non ristretto (AC) assolve al ruolo originariamente affidato da Frege alla regola di Sostituzione. Tale regola consente di sostituire ogni occorrenza libera di variabile del secondo ordine presente in un teorema, con una formula aperta, le cui variabili libere non siano vincolate da quantificatori del teorema[23]. Se ci si avvale dell'operatore λ per formare i nomi dei concetti, lo schema di assiomi di comprensione può altrimenti essere sostituito da un principio di lambda-conversione: $\forall y([\lambda x.\phi(x)]y \leftrightarrow \phi^y_x)$[24].

---

[23]Per la dimostrazione dell'equivalenza tra lo schema di assiomi di comprensione e la regola di Sostituzione, cfr. Boolos 1985. Da un qualsiasi teorema logico (es. $\forall x(Fx \leftrightarrow Fx)$), si ottiene infatti – per generalizzazione esistenziale – una formula quantificata esistenzialmente (es. $\exists X \forall x(Xx \leftrightarrow Fx)$) da cui la Regola di Sostituzione consente di derivare la corrispondente istanza dello schema di assiomi di comprensione (es. $\exists X \forall x(Xx \leftrightarrow \phi(x))$).

[24]Utilizzando l'operatore λ, la Regola di Sostituzione consente la sostituzione, in ogni proposizione che sia derivabile come teorema del sistema, di occorrenze libere di variabili del secondo ordine (Xa) con λ-espressioni $[\lambda x.\phi(x)]$ e infine la loro conversione in formule che siano il risultato della sostituzione di ogni occorrenza libera di variabili del primo ordine con l'oggetto che cade sotto il concetto nominato dalla λ-espressione. Dalla

Basic Law V è qui presentata in una versione assiomatica. È tuttavia disponibile una sua versione schematica[25]. La differenza tra le due versioni è rilevante solo nel caso in cui lo schema di assiomi di comprensione (AC) preveda una restrizione sulla formula di comprensione e introduca dunque un'asimmetria tra formule del linguaggio esprimibili e concetti specificati. In tal caso, la versione assiomatica del principio d'astrazione risulta più debole, rispecchiando le limitazioni di AC. Le due versioni sono invece equivalenti in presenza di uno schema di assiomi di comprensione non ristretto – come nella teoria fregena (T_F) entro cui è ricostruita la *derivazione minima*[26].

In entrambi i casi, *Basic Law V* è un principio d'astrazione, ossia un principio che stabilisce la reciproca implicazione tra l'identità di termini di una certa categoria (in questo caso, termini singolari ottenuti con l'applicazione dell'operatore d'astrazione) e l'equivalenza tra termini di una seconda categoria (in questo caso, variabili o costanti concettuali). Come tale, un qualsiasi principio d'astrazione assolve ad almeno tre ruoli definitori, ossia, in primo luogo, l'inter-definizione di una relazione d'equivalenza e della funzione denotata dall'operatore d'astrazione, in secondo luogo, la definizione implicita dei valori (astratti) di tale funzione e infine la caratterizzazione, in senso lato, della nozione formalizzata dall'astrazione.

Nell'accezione più evidente, il bicondizionale di un qualsiasi principio d'astrazione rappresenta dunque la reciproca definizione di una relazione d'equivalenza e di una correlazione funzionale, che prendano, come argomenti, elementi del medesimo dominio. In particolare, BLV è l'inter-definizione della relazione di co-estensionalità tra concetti e della funzione di estensionalità da concetti a oggetti, ossia della funzione che mappa concetti co-estensionali in un medesimo correlato astratto (estensione o decorso di valore).

L'inter-definizione con una relazione d'equivalenza offre numerose informazioni sulla correlazione. In primo luogo, in un generico principio d'astrazione, il condizionale da destra a sinistra, ossia l'affermazione che l'equivalenza degli argomenti implica l'identità dei valori impone che l'assegnazione dei valori agli argomenti, da parte della correlazione, rispetti la partizione del dominio, operata dalla relazione di equivalenza e, assegnando un unico valore a ciascuna classe di equivalenza, presuppone sempre la

formula $\forall y(Fy \leftrightarrow Fy)$, si ottiene dunque la formula $\forall y([\lambda x.\phi(x)]y \leftrightarrow [\lambda x.\phi(x)]y)$ – ad esempio, $\forall y([\lambda x.Dx]y \leftrightarrow [\lambda x.Dx]y)$ – e, per λ-conversione, $\forall y(\phi(y) \leftrightarrow \phi(y))$ – ad esempio, $\forall y(Dy \leftrightarrow Dy)$. Cfr. Zalta 2019.

[25] *Basic Law V* schematica: $\epsilon x.\phi(x) = \epsilon x.\psi(x) \leftrightarrow \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.

[26] Nei prossimi capitoli si utilizzerà quindi la versione assiomatica dando per assunta tale equivalenza. Verranno segnalate invece differenze nel caso di restrizioni su AC. Cfr. parr. 2.2.1 e 2.3.1.

funzionalità della correlazione. Nel caso specifico di *Basic Law V*, il condizionale da destra a sinistra ($\forall X \forall Y(\forall x(Xx \leftrightarrow Yx) \rightarrow \epsilon X = \epsilon Y)$) – che, seguendo Frege[27], indichiamo come BLVa – impone la funzionalità come unica condizione. Si può dunque dire che BLVa impone alla correlazione estensionale il requisito più debole che il condizionale da destra a sinistra di un principio d'astrazione possa imporre.

La situazione opposta si verifica per quanto concerne il condizionale da sinistra a destra. In un generico principio d'astrazione, tale condizionale fornisce informazioni sulla ripartizione degli argomenti in classi di equivalenza e quindi, indirettamente, su quali e quanti di essi vengono mappati su uno stesso astratto. Nel caso di BLV, la partizione del dominio operata dalla co-estensionalità ascrive al condizionale da sinistra a destra di *Basic Law V* ($\forall X \forall Y(\epsilon X = \epsilon Y \rightarrow \forall x(Xx \leftrightarrow Yx))$) – BLVb – il significato più forte possibile, ossia l'iniettività. Si può incidentalmente osservare che nessun principio d'astrazione esclude invece l'eventualità che la funzione d'astrazione non sia suriettiva[28]. Nel caso di BLV, non è dunque impedito – almeno da un punto di vista assiomatico – che il dominio del primo ordine includa, oltre agli elementi (decorsi di valore o estensioni[29]) che fungono da immagine dei concetti, oggetti differenti.

Nella seconda accezione definitoria, ciascuna istanza del principio d'astrazione, fornendo, nei termini di una relazione di equivalenza, le condizioni d'identità di un particolare astratto, rappresenta la definizione implicita di quest'ultimo. In particolare, le istanze di BLV definiscono implicitamente, nei termini di co-estensionalità dei rispettivi concetti, i singoli decorsi di valore. Dato che la partizione del dominio del secondo ordine in base alla co-estensionalità prevede classi contenenti un singolo concetto, le istanze in cui i due lati del bicondizionale sono vere risultano essere quelle in cui la variabile del secondo ordine è istanziata da uno stesso predicato ed è dunque affermata l'auto-identità del rispettivo decorso di valore.

A questa seconda funzione definitoria del principio nei confronti degli astratti è spesso connesso un secondo compito, di carattere esistenziale. La forma bi-condizionale dei principi d'astrazione ammette infatti, in presenza della logica classica, di essere sostituita o *fattorizzata* in due principi distinti[30], che rispettivamente stabiliscono l'identità ($\mathrm{PA}_{=}$:

---

[27]Cfr. *GGA*, *Appendice.*

[28]Un esempio di correlazione iniettiva ma non suriettiva è la funzione *successore* entro i numeri naturali.

[29]Si ricorda che, qualora non diversamente indicato, i due termini, decorso di valore ed estensione, sono utilizzati come sinonimi interscambiabili. Cfr. nota 18.

[30]Sulla reciproca interpretatibilità di queste due versioni del principio d'astrazione, cfr.

$\forall X \forall Y(\epsilon X = \epsilon Y \leftrightarrow \forall x(Xx \leftrightarrow Yx)))$ e l'esistenza (PA$_\exists$: $\forall X \exists x(x = \epsilon X)$) degli astratti[31]. La fattorizzazione, per un verso, esplicita, tramite il criterio d'identità (PA$_=$), il ruolo di definizione implicita già illustrato, d'altro canto, ascrive al principio d'astrazione una funzione esistenziale (PA$_\exists$), letteralmente assente nella versione bicondizionale e derivabile da essa (in particolare dal condizionale da destra a sinistra) solo in presenza della logica classica[32]. Questo teorema (PA$_\exists$), classicamente inscindibile dal principio d'astrazione, rimane comunque distinguibile da esso e infatti aggiunge, alla caratterizzazione della funzione d'astrazione, un'informazione sul suo dominio, assente tra quelle fornite dalla versione bi-condizionale. PA$_\exists$ afferma infatti che la correlazione denotata dall'operatore d'astrazione è totale, ossia definita sull'intero dominio sottoposto a partizione dalla relazione d'equivalenza.

Riguardo a questo teorema sull'esistenza degli astratti, è necessario sottolineare che non solo è disponibile soltanto ammettendo gli assiomi che regolano la quantificazione e l'identità in logica classica, ma è, in realtà, equivalentemente derivabile, in presenza di un qualsiasi simbolo funzionale, anche in assenza del principio d'astrazione, come conseguenza dei soli assiomi logici menzionati. Tale teorema sarà dunque indicato, come TEA, in accezione generica o per sottolineare la disponibilità di una sua derivazione puramente logica; sarà invece indicato come PA$_\exists$ quando si vuole enfatizzare la sua derivazione dal principio d'astrazione. Risulta dunque chiaro che tale risultato relativo all'esistenza degli astratti e al dominio della funzione d'astrazione è connesso al principio d'astrazione, perché verte sullo stesso simbolo, ma è concettualmente e logicamente indipendente da esso.

Nel caso di *Basic Law V*, entro un sistema come T_F (che comprende la logica classica) tale teorema – indicato come teorema sull'esistenza delle estensioni (TEE) – afferma l'esistenza di un correlato oggettuale astratto (decorso di valore o estensione) per ogni concetto. Anche in questo caso, per

---

Linnebo 2018. p. 59.

[31]La prima proposta di fattorizzazione di un principio d'astrazione – cfr. Boolos 1986 – riguardava, in realtà, un principio d'astrazione consistente concernente i numeri (Principio di Hume - HP). In tal caso, la proposta consisteva nel distinguere un principio di comprensione non logico che stabilisse l'esistenza dei numeri – *Numeri*: $\forall F \exists ! x \forall G(G\eta x \leftrightarrow G \approx F)$ o, introducendo il predicato *Num*, $\forall F \exists ! x(Numx \wedge \forall G(G\eta x \leftrightarrow G \approx F))$ – e un principio d'identità che separasse le condizioni d'identità dei numeri da quelle degli altri oggetti – $x = y \leftrightarrow (Num(x) \wedge Num(y) \wedge \forall F(F\eta x \leftrightarrow F\eta y)) \vee (\neg Num(x) \wedge \neg Num(y) \wedge \forall F(Fx \leftrightarrow Fy)))$. Questo tipo di accorgimento evita problemi connessi alle condizioni d'identità degli astratti – come il problema di Cesare. Strategie simili possono essere applicate anche nei confronti di principi d'astrazione inconsistenti come *Basic Law V*.

[32]Questo aspetto sarà al centro della terza proposta esplicativa relativa al paradosso di Russell. Cfr. cap. 4.

distinguere le due derivazioni, il teorema sarà indicato come TEE, quando considerato come risultato della derivazione logica o senza riferimento al tipo di derivazione con cui è ottenuto[33], e come BLV$_\exists$, quando considerato come frutto della fattorizzazione del principio d'astrazione[34].

Infine, nella terza accezione definitoria menzionata, un principio d'astrazione fornisce una caratterizzazione *estensionale*[35] della nozione formalizzata dall'astrazione, ossia del concetto sotto cui cadono gli astratti[36]. In questa accezione lata di definizione, si può affermare che BLV, in particolare, caratterizzi *estensionalmente* la nozione di decorso di valore, perché consente l'identificazione di tutti gli oggetti che la esemplificano.

1.3 Spiegazioni e soluzioni in ambito astrazionista

I dati da cui prende inizio l'analisi della versione formale del paradosso di Russell sono, da un lato, la consistenza della logica del secondo ordine con AC impredicativo, in assenza di *Basic Law V*[37] e, d'altro lato, la consistenza di sistemi di logica del secondo ordine con AC predicativo, il cui linguaggio

[33]La sigla TEE, quando non diversamente indicato sarà utilizzata in questo senso più generale, per riferirsi al teorema, senza riferimento alla derivazione con cui è ottenuto.

[34]Nel caso delle spiegazioni avanzate entro la cornice delle teorie dinamiche dell'astrazione (cfr. cap. 3), BLV$_\exists$ sarà anche indicato come *Collasso* (cfr. nota 361). In generale, la doppia indicazione di tale risultato (TEE e BLV$_\exists$) sarà più volte ripresa come nota terminologica, (cfr. nota 301, 461), ma apporterà un contributo argomentativo solo nella discussione delle spiegazioni e delle soluzioni concernenti l'astrazione (cfr. cap. 4).

[35]L'aggettivo *estensionale* allude qui a una seconda accezione (non standard) del termine "estensione", anticipata nella nota 18. In questa accezione, l'aggettivo "estensionale" non fa riferimento alla nozione fregeana di "estensione" come sinonimo di decorso di valore (cfr. nota 18), ma è utilizzato – come opposto di *intensionale* – per indicare uno dei due aspetti distintivi dei concetti, ossia l'insieme degli oggetti di cui risulta vera la sua predicazione. In altri casi (cfr. par. 3.2.3), l'aggettivo *estensionale* verrà utilizzato in accezione simile – contrapposto a *intensionale* – per indicare l'aspetto dominante di una certa tipologia di entità (ad esempio, concetti oppure insiemi). Tutte le volte che il termine *estensionale* sarà usato in questa accezione – che riteniamo spuria rispetto al contesto fregeano – verrà esplicitamente segnalato. Per la terza accezione del termine "estensione", cfr. nota 51.

[36]La caratterizzazione della nozione formalizzata dall'astrazione coincide, in questa accezione lata di definizione, con la delimitazione degli oggetti di cui risulti vera la sua predicazione. Si può sottolineare che tale caratterizzazione vale sia nel caso di principi che, come BLV, descrivono funzioni aventi argomenti del secondo ordine sia principi concernenti funzioni aventi argomenti del primo ordine. Il principio fregeano delle direzioni ($d(l_1) = d(l_2) \leftrightarrow l_1//l_2$), in cui le condizioni di identità delle direzioni sono fornite nei termini di co-estensionalità delle rispettive linee, ossia di oggetti, può, ad esempio, essere letto come una caratterizzazione della nozione di direzione.

[37]Cfr. Zalta 2019.

sia arricchito dall'operatore di astrazione ϵ e ai cui assiomi sia aggiunto *Basic Law V*[38].

A questi dati corrisponde una prima analisi che riduce il paradosso all'incompatibilità tra lo schema di assiomi di comprensione impredicativo e *Basic Law V*[39]. A tale analisi si può contestare, in primo luogo, un difetto di precisione nella Tesi I, dal momento che seleziona non una ma due premesse necessarie, addirittura congiuntamente sufficienti alla contraddizione. In modo ancor più grave, si può segnalare l'assenza di una Tesi II, ossia, anche ammesso di volersi concentrare sulla congiunzione di AC e BLV, sembra impossibile identificare il preciso difetto di cui tale congiunzione è portatrice – e dunque trarne indicazioni per una congrua soluzione. Preme infatti sottolineare che la direzione di BLV esplicitamente coinvolta nella derivazione del paradosso è costituita dal solo condizionale da sinistra a destra (BLVb: $\forall X \forall Y(\epsilon X = \epsilon Y \rightarrow \forall x(Xx \leftrightarrow Yx))$ e che tale principio non confligge apertamente con lo schema di assiomi di comprensione: BLVb richiede che la funzione denotata dall'operatore d'astrazione, classicamente definita sull'intero dominio del secondo ordine, sia iniettiva, dunque, secondo un'interpretazione standard, che il dominio del secondo ordine abbia una cardinalità almeno pari a quella del dominio del primo ordine; d'altro canto, lo schema di assiomi di comprensione, di per sé, non esprime requisiti di cardinalità sui domini[40] ed è infatti soddisfacibile non solo nei modelli standard (cardinalmente incompatibili con BLVb) ma anche nei modelli secondari della logica del secondo ordine (cardinalmente compatibili con BLVb ma comunque incapaci di fornirne un'interpretazione).

L'eventuale conflitto di BLV con AC e la logica classica sembra dunque dover essere ricercato in altri frammenti di T_F, configurando più precise opzioni esplicative. Si considereranno appartenenti alla prima famiglia di spiegazioni – *relative all'iniezione* – le proposte che identificano BLVb come condizione responsabile dell'inconsistenza, motivando tale scelta con la scorrettezza del requisito di iniettività che tale principio impone alla funzione. In questa direzione esplicativa, convergono almeno tre argomentazioni differenti. La prima – *cantoriana* – individua il difetto sintattico dell'iniettività della funzione di estensionalità nella sua violazione del teorema di Cantor e interpreta tale violazione come una richiesta insoddisfacibile relativamente alla cardinalità del dominio e del codominio della funzione[41]. La seconda – originalmente *fregeana* – individua il difetto sintattico dell'iniettività della

[38] Cfr. Heck 1996.
[39] Cfr. Burgess 2005, Ferreira e Wehmeier 2002, Linnebo 2009a, Uzquiano 2017.
[40] Cfr. Zalta 2019.
[41] Cfr. cap. 2, Boolos 1993, Uzquiano 2017.

funzione nella mancata aderenza alla partizione del dominio che la relazione di equivalenza (cui la funzione è associata) determina, interpretandola come un'inappropriata traduzione della nozione estensionale di classe[42]. La terza – declinazione della precedente – circoscrive il difetto dell'iniettività ad alcuni suoi argomenti, ritenuti inadatti alla correlazione estensionale[43].

A queste differenti spiegazioni corrispondono soluzioni che intervengono diversamente sulla connotazione iniettiva della correlazione. Una soluzione di tipo *cantoriano* si esprime in una mera correzione della relazione di cardinalità dei domini[44]. Una soluzione di tipo *fregeano* modifica la relazione di equivalenza con cui è stabilita la partizione del dominio, definendo una nuova funzione non iniettiva (o iniettiva a meno di determinate eccezioni)[45]. In questa stessa direzione, la correzione che segue dall'identificazione di una categoria di argomenti problematici procede con una restrizione, più forte di quella fregeana, del principio d'astrazione, mediante aggiunta di condizioni sulla relazione di equivalenza[46]. Si deve precisare che, lasciando inalterata la logica classica, tali restrizioni della funzione mediante correzioni della relazione di equivalenza sortiscono un effetto limitato al comportamento iniettivo della correlazione – che rimane tuttavia definita sull'intero dominio del secondo ordine[47].

Si considereranno invece appartenenti alla seconda famiglia di spiegazioni – *relative alla comprensione* – le proposte accomunate dalla critica alla specificazione (classica) dei concetti. Come anticipato, tali spiegazioni identificano lo schema di assiomi di comprensione come condizione problematica del paradosso e motivano tale scelta con l'inadeguatezza della definizione del dominio del secondo ordine. Anche in questa direzione esplicativa convergono argomentazioni differenti, incentrate su caratteristiche ritenute non formalizzabili entro la logica classica, come la circolarità – rinvenuta nella forma impredicativa[48], negativa[49] o indeterminata[50] – dello schema di assiomi di comprensione o sulla natura indefinitamente estendibile di alcune sue istanze.

[42]Cfr. cap. 4, *GGA*, *Appendice.*

[43]Cfr. cap. 4, Dummett 1991.

[44]Cfr. Paseau 2015.

[45]Cfr. *GGA*, Quine 1955, Cook 2009.

[46]Cfr. Boolos 1986; Shapiro 2003.

[47]La funzione risulta infatti avere un comportamento iniettivo relativamente alla porzione del dominio selezionata tramite la relazione di equivalenza, mentre un comportamento imprevedibile relativamente a tutti gli altri argomenti.

[48]Cfr. cap. 2, Dummett 1991, Schroeder-Heister 1987, Parsons 1987, Heck 1996, Wehmeier 1999, Ferreira e Wehmeier 2002, Ferreira 2005.

[49]Cfr. Jingxian 2012.

[50]Cfr. cap. 3, Yablo 2004; Linnebo 2009a; Linnebo 2010.

A queste spiegazioni corrispondono dunque sia soluzioni basate su restrizioni predicative, positive e determinate dello schema di assiomi di comprensione, sia la scelta di valorizzare l'indefinita estendibilità dei concetti con l'adozione di una logica non classica (ad esempio, intuizionista).

Si considereranno infine appartenenti alla terza famiglia di spiegazioni – *relative all'astrazione* – le proposte accomunate dalla critica all'universale specificazione (classica) degli astratti. Poiché la Tesi I di queste spiegazioni seleziona un teorema (TEE/$\text{BLV}_\exists$), è corretto segnalarne tre alternative versioni, distinte tra loro in base agli assiomi cui riconducono tale risultato e dunque la stessa contraddizione. La prima versione – propriamente *estensionalista*[51] – si concentra sulla derivazione logica di TEE, mettendo in discussione la validità della teoria classica dell'identità e della quantificazione al primo ordine[52]. Una variante – *astrazionista* – enfatizza la derivazione di TEE dal principio d'astrazione (ossia come $\text{BLV}_\exists$[53]) e dunque seleziona, come motore della contraddizione, BLVa[54]. Una terza versione – *dinamica* – verte su una versione modale e/o plurale di $\text{BLV}_\exists$ – che chiameremo *Collasso*[55].

Da un punto di vista argomentativo, le spiegazioni convergono nel mostrare l'inadeguata definizione della relazione di equivalenza sul lato destro di BLV per selezionare, quali argomenti della funzione di estensionalità, elementi dell'intero dominio del secondo ordine. In particolare, la posizione *estensionalista* ascrive la responsabilità del paradosso all'inadeguata relazione, formalizzata in logica classica, tra identità ed esistenza, indicando soluzioni fondate sull'adozione di logiche libere. Le spiegazioni *astrazioniste* si concentrano sulla caratterizzazione dei principi d'astrazione come interdefinizioni di una funzione e di una relazione di equivalenza, individuando in quest'ultima insufficienti proprietà logiche e suggerendo sue restrizioni. Le spiegazioni *dinamiche* si concentrano infine sulla selezione esplicita della porzione di dominio coinvolta nell'astrazione introducendo, come soluzioni, restrizioni del *Collasso*.

[51] L'aggettivo *estensionalista* allude qui a una terza accezione (non standard) del termine "estensione", anticipata nella nota 18. In questa accezione, il termine *estensionalista* non fa direttamente riferimento né alla nozione fregeana di "estensione" come sinonimo di decorso di valore (cfr. nota 18) né alla contrapposizione tra aspetto "estensionale" ed "intensionale" di un'entità (cfr. not 35), ma è scelto come etichetta di una tipologia di spiegazioni che pone particolare attenzione alla delimitazione del dominio della funzione di estensionalità e dunque all'interazione tra la logica e il principio d'astrazione.

[52] Cfr. cap. 4, Cocchiarella 1992; Shapiro e Weir 2000, Payne 2013.

[53] Cfr. nota 34.

[54] Cfr. cap. 4, Fine 2002; Cook 2016.

[55] Cfr. cap. 3, Linnebo 2010; Linnebo 2016; Linnebo 2018.

A questa terza famiglia di spiegazioni – complessivamente concernenti l'astrazione – sembrano inoltre riconducibili anche soluzioni autonomamente proposte. Per un verso, dal rifiuto di TEE, seguono la rinuncia alla legge fregeana che afferma l'equivalenza tra appartenenza a una classe e predicazione di un concetto (LE: $\forall X \forall x(x \in \epsilon X \leftrightarrow Xx)$) e, da questa, la restrizione del principio di comprensione per classi (ACc: $\exists X \forall y(y \in X \leftrightarrow \phi x)$) – che è, ad esempio, alla base di un teoria degli insiemi come ZF. D'altro canto, questa stessa analisi sembra suggerire anche soluzioni – che chiameremo *zig zag* – che distinguono il dominio della funzione di estensionalità da quello del secondo ordine, aggiungendo un secondo assioma di comprensione[56]. Questa strategia consente di distinguere gli elementi cui sono legittimamente applicabili i teoremi ricordati (TEE, LE) e il principio di comprensione per classi (ACc) dagli elementi che si sottraggono a queste conseguenze estensionali.

Nel seguito del libro, la presentazione delle varie posizioni seguirà la tassonomia fin qui introdotta. L'attenzione sarà principalmente rivolta verso la formulazione delle singole spiegazioni e delle loro più coerenti soluzioni. L'ordine espositivo suggerirà tuttavia anche convergenze e analogie trasversali alla classificazione[57].

[56] Cfr. cap. 2 Boccuni 2010; Boccuni 2011; Ferreira 2018.

[57] In ogni capitolo saranno accostati esempi di due tipologie di spiegazione/soluzione: nel primo capitolo, esempi di spiegazioni e soluzioni relative all'*iniezione* e alla *comprensione*; nel secondo, relative alla *comprensione* e all'*astrazione*; nel terzo, relative all'*astrazione* e relative all'*iniezione*.

a–n–a–l–i–t–i–c–a

L'elenco completo delle pubblicazioni
è consultabile sul sito

www.edizioniets.com

alla pagina

http://www.edizioniets.com/view-Collana.asp?col=Analitica

Pubblicazioni recenti

17. Ludovica Conti, *Paradosso di Russell e programmi astrazionisti. Spiegazioni e soluzioni a confronto*, 2020, pp. 256
16. Rossella Lupacchini, *Nella mente della natura. La scienza della luce e la dottrina delle ombre*, 2020, pp. 200
15. Luca Bellotti, Luca Gili, Enrico Moriconi, Giacomo Turbanti (eds.), *Third Pisa Colloquium in Logic, Language and Epistemology. Essays in Honour of Mauro Mariani and Carlo Marletti*, 2019, pp. 408
14. Carlo Gabbani, *Realismo e antirealismo scientifico. Un'introduzione*, 2018, pp. 180
13. Hykel Hosni, Gabriele Lolli, Carlo Toffalori (a cura di), *Le direzioni della ricerca logica in Italia 2*, 2018, pp. 440
12. Mauro Mariani, *Logica modale e metafisica. Saggi aristotelici*, 2018, pp. 384
11. John Stillwell, *Da Pitagora a Turing. Elementi di filosofia nella matematica*. A cura di Rossella Lupacchini, 2018, pp. 192
10. Ettore Casari, *La logica stoica*. A cura di Enrico Moriconi, 2017, pp. 124
9. Enrico Moriconi and Laura Tesconi (eds.), *Second Pisa Colloquium in Logic, Language and Epistemology*, 2014, pp. 376
8. Wilfrid Sellars, *L'immagine scientifica e l'immagine manifesta*. Raccolta di testi a cura di Carlo Marletti e Giacomo Turbanti, 2013, pp. 574
7. Luca Tranchini, *Proof and Truth. An anti-realist perspective*, 2013, pp. 176
6. Laura Tesconi, *Essays in Structural Proof Theory*, 2013, pp. 134
5. Luca Bellotti, *What is a model of axiomatic set theory?*, 2012, pp. 188
4. Lolli Gabriele, *La guerra dei Trent'anni (1900-1930). Da Hilbert a Gödel*, 2011, pp. 242
3. Marletti Carlo (ed.), *First Pisa Colloquim in Logic, Language and Epistemology*, 2010, pp. 190
2. Moriconi Enrico, *Strutture dell'argomentare*, 2009, pp. 176
1. Bellotti Luca, *Teorie della verità*, 2008, pp. 140

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com
Finito di stampare nel mese di settembre 2020