

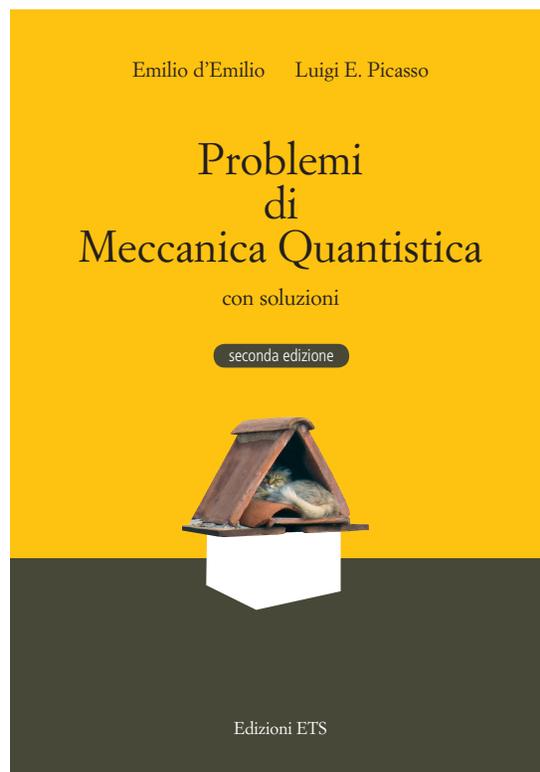
Emilio d'Emilio Luigi E. Picasso

Problemi di Meccanica Quantistica

con soluzioni

seconda edizione

Del libro viene qui presentata, a scopo promozionale, una campionatura consistente in un problema per ogni capitolo e relativa soluzione. La scelta dei problemi non è stata dettata da particolari criteri: essi dovrebbero soltanto fornire al lettore una indicazione sullo stile e le caratteristiche del libro. Occorre tenere presente che sia i testi scelti che le soluzioni possono risultare più chiari – per esempio a causa di riferimenti anche non espliciti a problemi precedenti – se inseriti nel contesto dell'intero libro.



Indice

Il primo numero si riferisce al capitolo dei testi, il secondo alle relative soluzioni.

1 Sistemi Classici	1	5
Modelli atomici; irraggiamento; scattering di Rutherford; calori specifici; modi normali di oscillazione.		
2 “Old Quantum Theory”	13	20
Spettroscopia e costanti fondamentali; effetto Compton; quantizzazione di Bohr–Sommerfeld; calori specifici; onde di de Broglie.		
3 Onde e Corpuscoli	29	37
Interferenza e diffrazione con singole particelle; polarizzazione dei fotoni; legge di Malus; relazioni di indeterminazione.		
4 Stati, Misure e Probabilità	47	53
Principio di sovrapposizione; osservabili; miscele statistiche; regole di commutazione.		
5 Rappresentazioni	63	73
Rappresentazioni; trasformazioni unitarie; teorema di von Neumann; stati coerenti; rappresentazioni di Schrödinger e degli impulsi; teorema di degenerazione.		
6 Sistemi Unidimensionali	89	103
Teorema di non degenerazione; metodo variazionale; potenziali rettangolari; matrice di trasferimento e matrice S ; potenziali a delta; superpotenziale; completezza.		
7 Evoluzione Temporale	133	142
Evoluzione temporale negli schemi di Schrödinger e di Heisenberg; limite classico; inversione temporale; rappresentazione di interazione; approssimazione impulsiva e approssimazione adiabatica.		
8 Momento Angolare	159	165
Il momento angolare orbitale: stati con $l = 1$ e rappresentazioni; operatori di rotazione; armoniche sferiche; tensori e stati di momento angolare definito ($l = 1, l = 2$).		
9 Cambiamenti di Riferimento	177	182
Teorema di Wigner; punti di vista attivo e passivo; sistema di riferimento traslato, ruotato; in moto uniforme; in caduta libera, rotante.		

10 Sistemi Bi- e Tri-Dimensionali	191	196
Separazione delle variabili; teorema di degenerazione; gruppo di invarianza dell'oscillatore bidimensionale isotropo.		
11 Particella in Campo Centrale	205	211
Equazione di Schrödinger con potenziali radiali in due e tre dimensioni; livelli vibrazionali e rotazionali di molecole.		
12 Perturbazioni ai Livelli Energetici	221	232
Perturbazioni in sistemi unidimensionali; metodo di Bender–Wu per l'oscillatore anarmonico; teoremi di Feynman–Hellmann e del viriale; teorema di “no-crossing”; perturbazioni esterne e interne negli idrogenoidi.		
13 Spin e Campo Magnetico	249	257
Spin $\frac{1}{2}$; apparato di Stern e Gerlach; rotazioni di spin; interazione minimale; livelli di Landau; effetto Aharonov–Bohm.		
14 Transizioni Elettromagnetiche	267	274
Radiazione coerente e incoerente; effetto fotoelettrico; transizioni in approssimazione di dipolo; distribuzione angolare e polarizzazione della radiazione emessa; vite medie.		
15 Sistemi Composti e Particelle Identiche	283	291
Livelli rotazionali di molecole poliatomiche; stati correlati e matrici densità; stati di singoletto e di tripletto; composizione di momenti angolari; fluttuazioni quantistiche; paradosso EPR; teletrasporto quantistico.		
16 Applicazioni alla Fisica Atomica	303	312
Perturbazioni sulla struttura fine dei livelli dell'idrogeno; configurazioni elettroniche e termini spettroscopici; struttura fine; effetto Stark e Zeeman; righe di intercombinazione.		
Appendice Formule Utili		325
Indice Analitico		327

Prefazione

Questo libro nasce dall'esigenza – sentita da entrambi gli autori nell'arco di una più che decennale esperienza nell'insegnamento della Meccanica Quantistica – di mettere a disposizione degli studenti del materiale didattico adatto a verificare “in tempo reale” l'apprendimento di quanto presentato dal docente a lezione. Se è vera infatti – almeno qui da noi, ma pensiamo anche altrove – l'ampia disponibilità di raccolte di problemi d'esame, è altrettanto evidente quanto siano inadatti allo studente che è nel mezzo delle cose la forma e il linguaggio con cui tali problemi sono presentati: estrarre e adattare al progredire del corso quanto contenuto in ciascuno di tali problemi è compito che richiede una conoscenza già avanzata della disciplina e viene fatto, con cadenza quasi quotidiana, dal docente responsabile delle esercitazioni. Indotti da tale constatazione e anche dalla relativa scarsità riscontrata in letteratura di testi scritti con tale intento, abbiamo cercato di rimediare a questa situazione seguendo abbastanza fedelmente nell'ordine di presentazione degli argomenti il testo di L.E.P.: “Lezioni di Meccanica Quantistica” (ETS – Pisa 2000), anche se il nostro obiettivo è stato quello di rendere questa raccolta di problemi il più possibile autonoma e utilizzabile indipendentemente dai vari libri di testo: è per questa ragione che certe tecniche, come ad esempio metodo variazionale, il teorema del viriale, le regole di selezione, vengono proposti sotto forma di problemi, così da poterli utilizzare successivamente.

Non abbiamo ritenuto opportuno chiudere questa raccolta con un capitolo di problemi d'esame per almeno due ragioni: la prima – già menzionata – è che i problemi d'esame non mancano e, inoltre, sono giustamente legati al gusto personale del docente che può prediligere e insistere su certi argomenti piuttosto che su altri, fra i tanti che tale disciplina può affrontare. Ma l'assenza di tale capitolo conclusivo non dovrebbe essere una carenza grave dato che, almeno nella nostra opinione, i problemi d'esame non dovrebbero essere nè più difficili nè più “nuovi” di quelli affrontati durante la preparazione. La seconda ragione è sicuramente che il presente volume già sfiora, così com'è, la “massa critica” oltre la quale lo studente potrebbe sentirsi scoraggiato. A questo riguardo aggiungiamo che i 240 problemi proposti possono anche essere – e quasi certamente sono – troppi per preparare l'esame: non è detto che lo studente li debba risolvere tutti, ma andando avanti gli capiterà quasi certamente di voler riprendere certe cose lasciate in sospenso . . . (insomma: nei nostri intenti questo è un libro “per la vita”, non solo per l'esame). Comunque non abbiamo ritenuto di “asteriscare” gli esercizi difficili o non strettamente necessari: lasciamo questo compito al docente che, secondo la sue personali inclinazioni, indirizzerà lo studente verso i problemi più adatti alla situazione contingente.

Un avvertimento per gli studenti che si serviranno di questo libro: molti dei pro-

blemi (anche a detta dei nostri studenti che li hanno “collaudati” in via preliminare) sono facili, standard e adatti a richiamare e fare un primo uso delle nozioni introdotte a lezione. Altri no. Alcuni – anche fra quelli necessari a preparare l’esame – sono difficili e complessi, sia per la struttura che lo sforzo calcolativo richiesto, ma sono lì per mettere l’accento su questioni che abbiamo ritenuto importanti. Lo studente deve provarci lo stesso e non sentirsi frustrato se non ce la fa a risolverli da solo. Ricorrerà alla soluzione, il cui studio è pur sempre studio: alla fine avrà imparato di più.

È un piacere ringraziare il Prof. Pietro Menotti, fra i pochi nel nostro Dipartimento a vantare un’esperienza didattica più longeva della nostra sull’argomento, per gli innumerevoli suggerimenti e discussioni e che per uno di noi (E.d’E.) è stato un costante punto di riferimento. Ringraziamo infine gli studenti che ci hanno segnalato errori di stampa e non solo ... e saremo grati a quanti vorranno segnalarci ai seguenti indirizzi

E. d’Emilio: `demilio@df.unipi.it`

L.E. Picasso: `picasso@df.unipi.it`

i tanti errori che, inevitabilmente, sono sfuggiti ai nostri controlli.

Pisa, settembre 2003

*Emilio d’Emilio
Luigi E. Picasso*

Siamo grati ai colleghi (in particolare a B. Alles) e agli studenti che ci hanno segnalato alcuni errori di stampa e ci hanno aiutato, in qualche caso, a rendere l’esposizione più chiara.

I futuri aggiornamenti, come pure l’ERRATA-CORRIGE alla presente ristampa, verranno riportati sulla pagina web

<http://www.df.unipi.it/~demilio>

Pisa, aprile 2009

*E. d’E.
L.E. P.*

Prefazione alla seconda edizione

Negli ultimi due anni il libro ha conosciuto la sua prima versione inglese, redigere la quale ci ha portato a introdurre nella presente edizione italiana alcuni cambiamenti meno marginali che in passato: oltre all'aggiunta di due problemi (9.1 e 15.1 della presente edizione) e allo spostamento di alcuni altri (11.14 e 11.15 delle precedenti edizioni in 15.2 e 15.3 della attuale; 14.9, 7, 8 in 14.7, 8, 9) anche le soluzioni dei problemi sono ora offerte come parte finale di ogni capitolo, subito dopo la presentazione dei testi, anziché in una seconda parte del libro.

Inoltre: nelle soluzioni, soprattutto dei primi capitoli, abbiamo riorganizzato le formule in maniera tale che le quantità adimensionali sono sempre scritte come rapporto di due quantità note (due energie o due masse ...): in questo modo un controllo dimensionale a vista delle formule è possibile a ogni passo della soluzione - un'abitudine che lo studente dovrebbe fortemente cercare di acquisire. In più, per i calcoli numerici bastano le quantità riportate nella seconda pagina di copertina, senza ricorrere ai valori delle costanti fondamentali: in tal modo si guadagna sia in velocità che in affidabilità.

I passi avanti che la riforma dell'università italiana ha fatto in questi ultimi due anni - riaccorpando corsi semestrali negli attuali corsi annuali, da cui erano peraltro scaturiti qualche anno fa - hanno restituito alla disciplina la sua unità tematica, così com'era stata rispettata nel libro fin dalla sua prima stesura, ripristinandone l'intrinseca bellezza.

Pisa, ottobre 2011

*Emilio d'Emilio
Luigi E. Picasso*

1.1 Secondo un modello proposto da J.J. Thomson agli inizi di questo secolo, l'atomo consisteva di una carica positiva Ze uniformemente distribuita entro una sfera di raggio R , in cui si muovevano gli elettroni, supposti puntiformi (Z è il numero atomico).

- a) Calcolare R per l'atomo di idrogeno ($Z = 1$) sapendo che l'energia di ionizzazione E_I (minimo lavoro necessario per portare l'elettrone dalla sua posizione di equilibrio fino a distanza infinita) è di 13.6 eV (energia di ionizzazione).
- b) Se l'elettrone non è nella posizione di equilibrio, compie dentro la sfera un moto armonico. Qual è il periodo? Se emette radiazione elettromagnetica con la stessa frequenza, qual è la lunghezza d'onda λ della radiazione emessa, e in che regione dello spettro si trova? (Per la luce visibile $3900 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 7500 \text{ \AA}$).
- c) Determinare la polarizzazione della radiazione osservata nella direzione individuata dal vettore \hat{n} se: *i*) l'elettrone oscilla nella direzione dell'asse z ; *ii*) l'elettrone descrive un'orbita circolare nel piano $z = 0$.

1.1

- a) All'interno di una sfera uniformemente carica con carica totale Ze e il campo elettrico e il potenziale sono dati da ($\varphi(\infty) = 0$):

$$\vec{E} = \frac{Ze}{R^3} \vec{r}, \quad \varphi = -\frac{Ze r^2}{2R^3} + \frac{3Ze}{2R}, \quad r \leq R.$$

La posizione di equilibrio per l'elettrone è il centro della sfera che è una posizione di equilibrio stabile per le cariche negative; il lavoro per portare l'elettrone all'infinito è $-(-e)\varphi(0)$, quindi:

$$\frac{3}{2} \frac{e^2}{R} = 13.6 \text{ eV} = 2.2 \times 10^{-11} \text{ erg} \quad \Rightarrow \quad R = 1.6 \times 10^{-8} \text{ cm} = 1.6 \text{ \AA}.$$

- b) La forza di richiamo è armonica con pulsazione $\omega = \sqrt{e^2/mR^3}$. Quindi, riscritto ω come $(c/R) \times \sqrt{r_e/R}$, ($r_e \equiv e^2/m_e c^2$ è il raggio classico dell'elettrone) si ha:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \times \sqrt{\frac{R}{r_e}} \times \left(\frac{R}{c}\right) = 8 \times 10^{-16} \text{ s}$$

e la lunghezza d'onda della radiazione emessa è $\lambda = cT = 2.4 \times 10^{-5} \text{ cm} \simeq 2400 \text{ \AA}$, che è nell'ultravioletto.

- c) In approssimazione di dipolo, se $\vec{d}(t)$ è il momento di dipolo delle sorgenti e $\ddot{\vec{d}}(t) = -\omega^2 \vec{d}(t)$ (oscillatore armonico), a grandi distanze nella direzione del versore \hat{n} si ha:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\omega^2}{rc} (\vec{d} - (\vec{d} \cdot \hat{n}) \hat{n}), \quad \vec{d} \equiv \vec{d}(t - r/c)$$

e la polarizzazione è data dalla traiettoria del vettore $\vec{e}(t) = \vec{d} - (\vec{d} \cdot \hat{n}) \hat{n}$ che è la proiezione del vettore $\vec{d}(t)$ sul piano ortogonale alla direzione di osservazione \hat{n} . Quindi se $\vec{d} \parallel \hat{z}$, in ogni direzione \hat{n} diversa dalla direzione dell'asse z (dove il campo elettrico è nullo) la radiazione è polarizzata linearmente nel piano contenente \hat{n} e l'asse z ed è ortogonale ad \hat{n} ; se l'elettrone descrive un'orbita circolare nel piano $z = 0$ la proiezione dell'orbita sul piano ortogonale ad \hat{n} è un'ellisse, che può degenerare in un segmento se proiettata su un piano ad essa ortogonale, oppure è una circonferenza se proiettata su un piano ad essa parallelo. Quindi la polarizzazione è lineare in tutte le direzioni ortogonali all'asse z , circolare in direzione dell'asse z , ellittica in tutti gli altri casi.

2.7 Nel caso di sistemi con più gradi di libertà, se la hamiltoniana è “a variabili separate”, cioè si possono scegliere le q e le p in modo tale che $H = H_1(q_1, p_1) + H_2(q_2, p_2) \dots$, è possibile utilizzare le regole di quantizzazione di Bohr–Sommerfeld $\oint p_i dq_i = n_i h \quad \forall i = 1, \dots$ relative ai singoli gradi di libertà.

- a) Determinare i livelli energetici $E(n_1, n_2, n_3)$ di un oscillatore armonico tridimensionale *anisotropo*. Sfruttare il fatto che la hamiltoniana può essere scritta nella forma:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2 q_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_2^2 q_2^2 + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_3^2 q_3^2.$$

Si consideri ora un oscillatore tridimensionale *isotropo*. Il numero di stati che corrispondono ad un dato livello energetico $E_n = n \hbar \omega$ (“degenerazione del livello”) è dato dal numero di modi in cui si possono scegliere i tre numeri quantici n_1, n_2, n_3 per cui $E(n_1, n_2, n_3) = E_n$.

- b) Determinare la degenerazione dei livelli energetici di un oscillatore isotropo e il numero di stati con energia $E \leq E_n$.
- c) Determinare i livelli energetici $E(n_1, n_2, n_3)$ di una particella di massa m in una scatola a forma di parallelepipedo di spigoli a, b, c .
- d) Sempre nel caso di una particella in una scatola (di volume $V = abc$), determinare il numero di stati nel volume dello spazio delle fasi:

$$V \times \left[(|p_1| \leq p_{n_1}) \times (|p_2| \leq p_{n_2}) \times (|p_3| \leq p_{n_3}) \right]; \quad p_{n_i} = \frac{n_i \hbar}{2a}, \quad \text{etc.}$$

e mostrare che, anche in questo caso come già nel Problema 2.6, il volume per stato è h^3 .

2.7

- a) Poiché la hamiltoniana H è a variabili separate $H = H_1 + H_2 + H_3$, i suoi livelli energetici sono

$$E(n_1, n_2, n_3) = n_1 \hbar \omega_1 + n_2 \hbar \omega_2 + n_3 \hbar \omega_3.$$

- b) Nel caso di un oscillatore isotropo $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \equiv \omega$ e

$$E(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + n_2 + n_3) \hbar \omega \equiv n \hbar \omega, \quad n = n_1 + n_2 + n_3.$$

Scelto $n_1 = n - k$, ($k = 0, \dots, n$), n_2 e n_3 possono essere scelti in $k + 1$ modi: $n_2 = k, n_3 = 0$; $n_2 = k - 1, n_3 = 1$; \dots $n_2 = 0, n_3 = k$. Quindi la degenerazione del livello E_n è

$$g_n = \sum_0^n (k + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

e il numero di stati con energia $E \leq E_n$ è

$$\begin{aligned} \sum_0^n g_k &= \frac{1}{2} \sum_0^n (k^2 + 3k + 2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + 3 \frac{n(n + 1)}{2} + 2(n + 1) \right) = \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{6}. \end{aligned}$$

Si confronti il risultato – che sarà confermato dalla meccanica quantistica – con quanto trovato nella domanda d) del Problema 2.6.

- c) Anche nel caso della particella in una scatola la hamiltoniana è a variabili separate: $H = p_1^2/2m + p_2^2/2m + p_3^2/2m$, quindi:

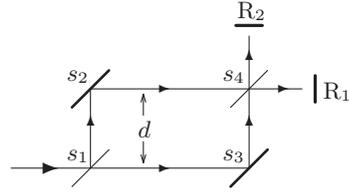
$$E(n_1, n_2, n_3) = \frac{n_1^2 h^2}{8ma^2} + \frac{n_2^2 h^2}{8mb^2} + \frac{n_3^2 h^2}{8mc^2} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right).$$

- d) Siccome $p_{n_1} = n_1 h/2a$, $p_{n_2} = n_2 h/2b$, $p_{n_3} = n_3 h/2c$, il volume richiesto è dato da $V \times 2^3 p_{n_1} p_{n_2} p_{n_3} = n_1 n_2 n_3 h^3$ e siccome il numero di stati con numeri quantici minori o uguali a n_1, n_2, n_3 è $n_1 n_2 n_3$, si ha la tesi.

3.4 L'interferometro di Bonse–Hart per i neutroni è simile all'interferometro di Mach e Zehnder per la luce (gli specchi sono cristalli di silicio dai quali i neutroni vengono riflessi “alla Bragg”).

Neutroni di lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = 1.4 \text{ \AA}$ vengono inviati orizzontalmente in un interferometro di Bonse–Hart nel quale i percorsi

dei neutroni si svolgono in un piano verticale. La differenza di quota fra i percorsi $s_2 \rightarrow s_4$ e $s_1 \rightarrow s_3$ è d (vedi figura). Si faccia l'ipotesi che la propagazione dei neutroni tra gli specchi sia rettilinea.



- Se $k \equiv 2\pi/\lambda$ è il numero d'onde dei neutroni, calcolare a meno di termini di ordine g^2 (g è l'accelerazione di gravità) la differenza $\Delta k \equiv k - k'$ fra il numero d'onde dei neutroni nei tratti $s_1 \rightarrow s_3$ e $s_2 \rightarrow s_4$ dovuta alla diversa energia potenziale.
- Se i tratti $s_1 \rightarrow s_3$ e $s_2 \rightarrow s_4$ hanno entrambi lunghezza L e anche i tratti $s_1 \rightarrow s_2$ e $s_3 \rightarrow s_4$ sono identici, calcolare la differenza di fase φ fra le onde di de Broglie che arrivano su s_4 lungo il percorso ‘basso’ ($s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_4$) e lungo il percorso ‘alto’ ($s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_4$). Calcolare φ se $d = 3 \text{ cm}$, $L = 7 \text{ cm}$.

L'interferometro viene ruotato attorno alla direzione del fascio incidente (direzione $s_1 \rightarrow s_3$) in modo da variare la differenza di quota fra $s_2 \rightarrow s_4$ e $s_1 \rightarrow s_3$.

- Calcolare il numero di massimi dei conteggi di R_1 (“numero di frange”) per una rotazione da -30° a $+30^\circ$ rispetto al piano verticale.

3.4

- a) Se p è la quantità di moto dei neutroni incidenti e p' la quantità di moto alla quota d , si ha:

$$\frac{p^2}{2m_n} = \frac{p'^2}{2m_n} + m_n g d \quad \Rightarrow \quad p - p' \simeq \frac{m_n^2 g d}{p}$$

e dalla relazione di de Broglie $p = h/\lambda = \hbar k$, si ha $\Delta k \simeq \frac{m_n^2 g d}{\hbar^2 k}$.

- b) $\varphi = kL - k'L = \Delta k \times L = \frac{m_n^2 g d L}{\hbar^2 k} = \frac{2\pi \lambda m_n^2 g A}{h^2} = 120$ radianti

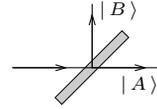
$A = d \times L$ è l'area racchiusa da $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_4 \rightarrow s_3 \rightarrow s_1$.

In effetti il risultato, al primo ordine in g , non dipende dalla forma del circuito $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_4 \rightarrow s_3 \rightarrow s_1$, ma solo dall'area racchiusa come si può dimostrare osservando che $\varphi = \hbar^{-1} \oint \vec{p} \cdot d\vec{q}$ e utilizzando il teorema di Stokes: poiché solo i tratti orizzontali del circuito sono rilevanti, possiamo definire il campo vettoriale $\vec{p}(x, z)$ come $p_x(x, z) = (p^2 - 2m_n^2 g z)^{1/2}$, $p_z(x, z) = 0$. Quindi, facendo attenzione al verso della circuitazione,

$$-(\text{rot } \vec{p})_y = -\frac{\partial p_x}{\partial z} = \frac{m_n^2 g}{\sqrt{p^2 - 2m_n^2 g z}} = \frac{m_n^2 g}{p} + O(g^2).$$

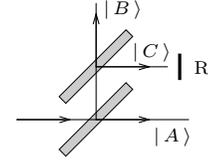
- c) Se θ è l'angolo di cui viene ruotato l'interferometro rispetto al piano verticale, si ha che $A \rightarrow A \cos \theta$ e quindi $\varphi \rightarrow \varphi \cos \theta$. Per $-30^\circ \leq \theta \leq +30^\circ$ la fase φ varia da $120 \times \cos 30^\circ = 104$ a 120 e poi ancora a 104, quindi c'è una escursione di 32 radianti e si vedono $32/2\pi \simeq 5$ massimi ('frange'). Il risultato è confermato da numerosi esperimenti effettuati negli anni fra il 1975 e il 1987.

4.10 Un fotone incide su uno specchio semitrasparente del quale supporremo che i coefficienti di riflessione e di trasmissione siano uguali. Sia $|A\rangle$ lo stato trasmesso dallo specchio, $|B\rangle$ lo stato riflesso e $\langle A|A\rangle = 1$, $\langle B|B\rangle = 1$, $\langle A|B\rangle = 0$.



- Dire se lo stato del fotone emergente è lo stato puro $\frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle)$ o la miscela statistica $\{|A\rangle, \frac{1}{2}; |B\rangle, \frac{1}{2}\}$.
- Se un rivelatore R con efficienza del 100% è posto sul percorso dello stato riflesso, qual è lo stato del fotone emergente nei casi in cui il rivelatore non registra l'arrivo del fotone?

Consideriamo ora il dispositivo costituito da due specchi semitrasparenti e dal rivelatore R come nella figura accanto.



- Scrivere lo stato del fotone emergente dal dispositivo quando il rivelatore R non registra l'arrivo del fotone.

4.10

- a) Lo stato del fotone emergente è uno stato puro. Infatti è possibile ricombinare la componente riflessa e quella trasmessa in modo da farle interferire (cosa che non è possibile se lo stato è una miscela statistica): basta aggiungere due specchi riflettenti e uno specchio semitrasparente in modo da costruire l'interferometro di Mach e Zehnder (vedi Problema 3.1).
- b) Il fatto che il rivelatore R non registri l'arrivo del fotone è comunque il risultato di una misura: la misura di una osservabile che dà come risposta “sì” o “no” (variabile dicotomica). Per il postulato della misura lo stato è $|A\rangle$.
- c) Lo stato del fotone appena prima di raggiungere il contatore è

$$|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|A\rangle + \frac{1}{2}|B\rangle + \frac{1}{2}|C\rangle.$$

Quindi, se il rivelatore R non registra l'arrivo del fotone (risposta “no”), lo stato dopo la misura è la proiezione di $|X\rangle$ sullo spazio ortogonale a $|C\rangle$, quindi (N è il fattore di normalizzazione):

$$N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|A\rangle + \frac{1}{2}|B\rangle\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}|A\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|B\rangle.$$

Sarebbe errato applicare il postulato della misura solo alla parte dello stato riflesso dal primo specchio: in tal caso si concluderebbe che $\frac{1}{2}(|B\rangle + |C\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|B\rangle$ e quindi che lo stato dopo la misura è $\frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle)$. Se quest'ultima conclusione fosse corretta, dopo avere inviato nel dispositivo molti fotoni si dovrebbe riscontrare che un uguale numero di fotoni emerge nello stato $|A\rangle$ e nello stato $|B\rangle$, mentre è evidente che il 50% emerge nello stato $|A\rangle$, il 25% nello stato $|B\rangle$ e il 25% nello stato $|C\rangle$.

5.19 Una particella in una dimensione si trova nello stato:

$$|A\rangle = |A_0\rangle + e^{i\varphi} U(a) |A_0\rangle$$

dove $U(a) = e^{-i p a / \hbar}$ è l'operatore di traslazione e $|A_0\rangle$ è lo stato di funzione d'onda $\psi_0(x) = (2\pi\Delta^2)^{-1/4} e^{-x^2/4\Delta^2}$, $\langle A_0 | A_0 \rangle = 1$.

- a) Quale condizione su a e Δ deve essere soddisfatta affinché $\langle A_0 | U(a) | A_0 \rangle$ sia trascurabile? Calcolare $\langle A_0 | U(a) | A_0 \rangle$ se $a = 10\Delta$.

D'ora in poi si assuma $\langle A_0 | U(a) | A_0 \rangle$ trascurabile.

- b) Determinare la densità di probabilità $\rho(x)$ per la posizione della particella. Nell'approssimazione in cui $\langle A_0 | U(a) | A_0 \rangle \simeq 0$, è possibile mediante misure di posizione determinare la fase φ ?
- c) Determinare la densità di probabilità $\tilde{\rho}(k)$ per l'impulso della particella.
- d) Qual è la precisione richiesta per le misure di impulso per poter distinguere lo stato $|A\rangle$ dalla miscela statistica $\{|A_0\rangle, \nu_1 = \frac{1}{2}; U(a)|A_0\rangle, \nu_2 = \frac{1}{2}\}$.

5.19

- a) Siccome $\psi_0(x)$ è una gaussiana apprezzabilmente diversa da zero in una regione di ampiezza 4Δ e la funzione d'onda di $U(a)|A_0\rangle$ è $\psi_0(x-a)$, $|A_0\rangle$ e $U(a)|A_0\rangle$ sono praticamente ortogonali se $a \gg \Delta$. Se $a = 10\Delta$ si ha:

$$\begin{aligned} \langle A_0 | U(a) | A_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/4\Delta^2} e^{-(x-a)^2/4\Delta^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+a/2)^2/4\Delta^2} e^{-(x-a/2)^2/4\Delta^2} dx = e^{-a^2/8\Delta^2} \simeq 4 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

- b) Lo stato $|A\rangle$ normalizzato, nell'approssimazione $\langle A_0 | U(a) | A_0 \rangle \simeq 0$, è $\frac{1}{\sqrt{2}}(|A_0\rangle + e^{i\varphi}U(a)|A_0\rangle)$

$$\text{con funzione d'onda } \psi_A(x) = \frac{1}{(8\pi\Delta^2)^{1/4}} \left(e^{-x^2/4\Delta^2} + e^{i\varphi} e^{-(x-a)^2/4\Delta^2} \right)$$

(l'approssimazione riguarda il coefficiente di normalizzazione). Tenuto conto che $\psi_0(x)$ e $\psi_0(x-a)$ hanno prodotto trascurabile,

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\Delta^2}} \left(e^{-x^2/2\Delta^2} + e^{-(x-a)^2/2\Delta^2} \right).$$

Siccome φ non compare nell'espressione di $\rho(x)$, non è possibile determinarlo mediante misure di posizione.

- c) In rappresentazione degli impulsi (vedi Problema 5.14):

$$|A_0\rangle \rightarrow \varphi_0(k) = \left(\frac{2\Delta^2}{\pi\hbar^2} \right)^{1/4} e^{-k^2\Delta^2/\hbar^2}; \quad U(a)|A_0\rangle = e^{-ipa/\hbar} |A_0\rangle \Rightarrow$$

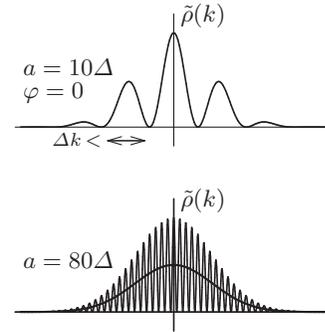
$$\varphi_A(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\Delta^2}{\pi\hbar^2} \right)^{1/4} e^{-k^2\Delta^2/\hbar^2} \left(1 + e^{i\varphi} e^{-ika/\hbar} \right) \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho}(k) = \sqrt{\frac{2\Delta^2}{\pi\hbar^2}} e^{-2k^2\Delta^2/\hbar^2} (1 + \cos(ka/\hbar - \varphi)).$$

- d) Per poter distinguere lo stato $|A\rangle$ dalla miscela statistica:

$$\{ |A_0\rangle, \nu_1 = \frac{1}{2}; U(a)|A_0\rangle, \nu_2 = \frac{1}{2} \}$$

è necessario che le misure di impulso siano in grado di rivelare il termine di interferenza $\cos(ka/\hbar - \varphi)$ che su un periodo $2\pi\hbar/a$ ha media nulla, quindi la precisione deve essere $\Delta k < 2\pi\hbar/a = h/a$ (vedi figura). Si noti che $\tilde{\rho}(k)$ coincide (e non per caso!) con la figura di interferenza da due fenditure "gaussiane" di larghezza $\simeq \Delta$ a distanza a : se $a \gg \Delta$ le frange sono troppo fitte e se il potere risolutivo dello strumento che misura l'impulso non è sufficientemente spinto ciò che si vede è solo l'intensità media cioè, nella figura accanto, la curva a tratto spesso.



6.6 È noto che una particella in una dimensione soggetta ad un potenziale “a buca” di profondità V_0 e larghezza $2a$ ammette un numero di stati legati dati dal più piccolo intero maggiore o uguale a $\sqrt{2m V_0 a^2/\hbar^2}/(\pi/2) = \sqrt{8m V_0 a^2/\pi^2\hbar^2}$. Utilizzando i risultati del Problema 6.5:

- a) Determinare il minimo numero n_b di stati legati che possono avere i seguenti potenziali:

$$V(x) = -3 \frac{\hbar^2}{m b^2} e^{-x^2/b^2}; \quad V(x) = -4 \frac{\hbar^2}{m b^2} e^{-x^2/b^2}.$$

- b) Determinare λ in modo tale che il potenziale:

$$V(x) = -\frac{\lambda}{x^2 + b^2}, \quad \lambda > 0$$

abbia almeno N stati legati.

- c) Determinare il numero di stati legati del potenziale

$$V(x) = -\frac{\lambda}{|x| + b}, \quad \lambda > 0, \quad b > 0.$$

6.6

- a) La buca di potenziale di larghezza $2a$ inscritta in un potenziale gaussiano $V(x) = -\lambda e^{-x^2/b^2}$ ha profondità $V_0 = \lambda e^{-a^2/b^2}$. Per ottenere la stima migliore dobbiamo determinare a in modo che $V_0 a^2$ sia massimo: ciò si ottiene per $a = b$, quindi $V_0 a^2 = \lambda b^2/e$. Il numero di stati legati della buca con $\lambda = 3\hbar^2/m b^2$ è il minimo intero maggiore o uguale a:

$$\sqrt{(8m/\pi^2\hbar^2) \times (3\hbar^2/m b^2) b^2/e} = \sqrt{24/(\pi^2 \times e)} = 0.95 \Rightarrow n_b \geq 1.$$

Analogamente, se $\lambda = 4\hbar^2/m b^2$,

$$\sqrt{(8m/\pi^2\hbar^2) \times (4\hbar^2/m b^2) b^2/e} = \sqrt{32/(\pi^2 \times e)} = 1.09 \Rightarrow n_b \geq 2.$$

- b) Come sopra, dobbiamo determinare il massimo di $a^2|V(a)| = \lambda a^2/(a^2 + b^2)$: questa funzione è massima per $a = \infty$, dove vale λ , quindi deve essere:

$$\frac{8m\lambda}{\pi^2\hbar^2} \geq (N-1)^2 \Rightarrow \lambda \geq (N-1)^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}.$$

- c) La funzione $\lambda a^2/(a + b)$ cresce indefinitamente al crescere di a , quindi il numero di stati legati è infinito per ogni $\lambda > 0$ e per ogni b .

7.4 La hamiltoniana di una particella di massa m in una dimensione è

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) + V(a-x)$$

dove $V(x)$ è un potenziale attrattivo a supporto compatto e a è tale che $V(x)$ e $V(a-x)$ abbiano supporti disgiunti (potenziale a “doppia buca”: vedi Problema 6.21). Supponiamo inoltre che $V(x)$ abbia un solo stato legato di energia $E_0 \equiv -\hbar^2 \kappa_0^2 / 2m$.

a) Mostrare che H commuta con l'operatore di inversione spaziale $I_{\bar{x}}$ rispetto ad un opportuno punto \bar{x} . Se I_0 è l'operatore di inversione spaziale rispetto all'origine ($I_0 q I_0^{-1} = -q$, $I_0 p I_0^{-1} = -p$), come si esprime l'operatore $I_{\bar{x}}$ in termini di I_0 ?

Se $\kappa_0 a$ è abbastanza grande (buche distanti) la hamiltoniana H ha due stati legati di energie E_1, E_2 (vedi Problema 6.21). Sia $E_1 < E_2$.

b) Scelte opportunamente le fasi dei vettori $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ (vedi Problema 5.5) determinare, fra gli stati sovrapposizione di $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$, gli stati $|S\rangle$ e $|D\rangle$ sui quali rispettivamente è minimo e massimo il valor medio di q .

Al tempo $t = 0$ la particella è ‘localizzata nella buca di sinistra’, cioè si trova nello stato $|S\rangle$ sul quale è minimo il valor medio di q .

- c) Determinate lo stato $|S, t\rangle$ all'istante t , dimostrare che lo stato $|S, t\rangle$ si evolve in modo periodico e calcolarne il periodo. Dopo quanto tempo per la prima volta la particella è ‘localizzata nella buca di destra’? Il risultato trovato ha analogo classico?
- d) Supponiamo di non conoscere $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$, ma di conoscere lo stato legato $|E_0, s\rangle$ della singola buca di sinistra $V(x)$. Come si ottiene lo stato legato $|E_0, d\rangle$ della singola buca di destra $V(a-x)$? Qual è la migliore approssimazione per gli autostati $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ di H in termini di $|E_0, s\rangle$ e $|E_0, d\rangle$?

7.4

a) La hamiltoniana è invariante per riflessione rispetto al punto $\bar{x} = a/2$:

$$\begin{cases} (q - \frac{1}{2}a) \rightarrow -(q - \frac{1}{2}a) \\ p \rightarrow -p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \rightarrow -q + a \\ p \rightarrow -p \end{cases} \Rightarrow$$

$$V(x) + V(a - x) \rightarrow V(a - x) + V(x).$$

Se $U(a) = e^{-ip a/\hbar}$ è l'operatore di traslazione: $U(-a) q U^{-1}(-a) = q + a$; si ha $I_{\bar{x}} = I_0 U(-a)$ (o anche $I_{\bar{x}} = U(a) I_0$ e altre espressioni equivalenti), infatti:

$$I_0 U(-a) q U^{-1}(-a) I_0^{-1} = I_0 (q + a) I_0^{-1} = -q + a,$$

$$I_0 U(-a) p U^{-1}(-a) I_0^{-1} = I_0 p I_0^{-1} = -p.$$

b) Gli stati $|E_1\rangle$ (fondamentale) e $|E_2\rangle$ (primo eccitato) sono rispettivamente pari e dispari per $I_{\bar{x}}$. Posto $\tilde{q} = q - \frac{1}{2}a$, si ha $\langle E_1 | \tilde{q} | E_1 \rangle = \langle E_2 | \tilde{q} | E_2 \rangle = 0$ (regola di selezione sulla parità: vedi Problema 6.1), quindi il valor medio di \tilde{q} sullo stato $\alpha |E_1\rangle + \beta |E_2\rangle$ ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) è $2 \Re(\alpha^* \beta \langle E_1 | \tilde{q} | E_2 \rangle)$. Siccome, in analogia con il Problema 5.5, possiamo scegliere le fasi di $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ in modo che $\langle E_1 | \tilde{q} | E_2 \rangle$, se non è nullo, sia reale e positivo, il valor medio di \tilde{q} , e quindi di q , è massimo e minimo rispettivamente per $\alpha = \pm \beta = 1/\sqrt{2}$. Quindi:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle - |E_2\rangle), \quad \langle S | q | S \rangle = \frac{a}{2} - \langle E_1 | \tilde{q} | E_2 \rangle$$

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle), \quad \langle D | q | D \rangle = \frac{a}{2} + \langle E_1 | \tilde{q} | E_2 \rangle.$$

L'elemento di matrice $\langle E_1 | \tilde{q} | E_2 \rangle$ non è nullo: infatti $\psi_{E_1}(x)$ è reale e non ha nodi, quindi ha segno costante, $\psi_{E_2}(x)$ ha un nodo in $x = \frac{1}{2}a$, quindi anche $\psi_{E_1}(x)(x - \frac{1}{2}a)\psi_{E_2}(x)$ ha segno costante e perciò il suo integrale non è nullo.

$$c) |S, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i E_1 t/\hbar} (|E_1\rangle - e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} |E_2\rangle)$$

quindi il periodo dello stato è $\tau = h/(E_2 - E_1)$; dopo mezzo periodo la particella si trova nello stato $|D\rangle$ e poi continua ad oscillare fra le due buche. Il risultato non ha analogo classico: una particella localizzata in una delle due buche di potenziale ha energia negativa e quindi non può attraversare la regione classicamente proibita che la separa dall'altra. Quando $\kappa_0 a \rightarrow \infty$, $\tau \propto e^{\kappa_0 a} \rightarrow \infty$ (vedi Problema 6.21).

$$d) |E_0, d\rangle = I_{\bar{x}} |E_0, s\rangle.$$

Lo stato $|E_1\rangle$ è pari sotto $I_{\bar{x}}$, mentre $|E_2\rangle$ è dispari; nel sottospazio generato da $|E_0, s\rangle$ e da $|E_0, d\rangle$ gli unici stati rispettivamente pari e dispari sono:

$$N_{\pm} (|E_0, s\rangle \pm |E_0, d\rangle); \quad N_{\pm} = (2 \pm 2 \langle E_0, s | E_0, d \rangle)^{-1/2}$$

con N_{\pm} fattori di normalizzazione. Nel limite $a \rightarrow \infty$, $E_1 = E_2 = E_0$ (vedi Problema 6.21), per cui tutte le combinazioni lineari di $|E_0, s\rangle$ e $|E_0, d\rangle$ sono autostati esatti di H , e quindi stazionari.

8.6 Le armoniche sferiche $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, se espresse in coordinate cartesiane, possono essere scritte come $r^{-l} \times$ (polinomio omogeneo di grado l in x, y, z). L'ortonormalità delle armoniche sferiche è espressa da:

$$\int Y_{l',m'}(\theta, \phi)^* Y_{l,m}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\phi.$$

a) È vero che tutti gli stati di funzioni d'onda:

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{r^2} \times (\text{polinomio omogeneo di grado } 2) \times f(r)$$

sono stati di momento angolare $l = 2$? E tutti gli stati di funzioni d'onda:

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{r} \times (\text{polinomio omogeneo di grado } 1) \times f(r),$$

sono autostati di \vec{L}^2 con $l = 1$?

b) Solo due fra le seguenti sono (a parte la normalizzazione) armoniche sferiche. Quali?

$$\cos^2 \theta e^{2i\phi}, \quad \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \quad \sin \theta \cos \theta e^{2i\phi}, \quad \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}.$$

c) Scrivere il più generale polinomio omogeneo di grado 2 che, moltiplicato per una funzione radiale, dà luogo a stati con $L_z = 0$. Sfruttare l'ortogonalità fra le armoniche sferiche con valori diversi di l per determinare quello che corrisponde a $l = 2$.

d) Utilizzare l'inversione spaziale rispetto al piano $y = 0$ per dimostrare che, a meno di un fattore di fase, $Y_{l,-m}(\theta, \phi) = Y_{l,m}(\theta, -\phi)$ e scrivere, sia in coordinate polari che in coordinate cartesiane, tutte le armoniche sferiche $Y_{l=2,m}(\theta, \phi)$, normalizzate.

8.6

a) No: i polinomi omogenei di grado 2 indipendenti sono 6: $x_i x_j$ ($i, j = 1, 2, 3$), mentre le armoniche sferiche con $l = 2$ sono 5; infatti $r^{-2}(x^2 + y^2 + z^2) f(r) = f(r)$ è la funzione d'onda di uno stato con $l = 0$. Invece i polinomi $\alpha x + \beta y + \gamma z$ danno tutti luogo a stati con $l = 1$ (vedi Problema 8.1).

b) si ha $z = r \cos \theta$, $(x + iy) = r \sin \theta e^{i\phi}$ da cui:

$$\cos^2 \theta e^{2i\phi} = \frac{1}{r^2} \left(z^2 \cdot \frac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} \right) \neq \frac{1}{r^2} \times (\text{polinomio omogeneo di grado 2}).$$

Analogamente $\sin \theta \cos \theta e^{2i\phi} = r^{-2} \left(z(x + iy)^2 / \sqrt{x^2 + y^2} \right)$. Invece:

$$\sin^2 \theta e^{2i\phi} = \frac{(x + iy)^2}{r^2}; \quad \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} = \frac{z(x + iy)}{r^2}.$$

Dal grado del polinomio si riconosce che in entrambi i casi $l = 2$, e dalla dipendenza da ϕ che la prima è proporzionale a $Y_{2,2}(\theta, \phi)$ e la seconda a $Y_{2,1}(\theta, \phi)$.

c) Il polinomio cercato deve essere invariante per rotazioni attorno all'asse z , quindi è $a(x^2 + y^2) + bz^2$. Quello che dà luogo a $Y_{2,0}(\theta, \phi)$ deve essere ortogonale a $Y_{0,0}(\theta, \phi)$, che è una costante, quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{a(x^2 + y^2) + bz^2}{r^2} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} (a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta) d \cos \theta \\ &= 2\pi \left(2a + \frac{2}{3}(b - a) \right) \Rightarrow b = -2a \\ &\Rightarrow Y_{2,0}(\theta, \phi) \propto \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2} = 1 - 3 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

d) Se I_y è l'operatore di inversione rispetto al piano $y = 0$: $x \rightarrow x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$, si ha $I_y L_z I_y^{-1} = -L_z$, $I_y \vec{L}^2 I_y^{-1} = \vec{L}^2 \Rightarrow I_y |l, m\rangle = |l, -m\rangle$ quindi, siccome $y \rightarrow -y \Rightarrow \phi \rightarrow -\phi$, $Y_{l,-m}(\theta, \phi) = Y_{l,m}(\theta, -\phi)$, a meno di un fattore di fase che di solito viene scelto uguale a ± 1 : lo porremo uguale a 1.

Per quanto visto in b) e in c) e per quanto sopra si ha (il calcolo dei fattori di normalizzazione comporta il calcolo di integrali elementari):

$$\begin{aligned} Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2} \\ Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z(x \pm iy)}{r^2} \\ Y_{2,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{r^2 - 3z^2}{r^2}. \end{aligned}$$

9.7 Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω il cui centro di oscillazione si sposta con velocità uniforme v .

- a) Scrivere la hamiltoniana del sistema sia nel riferimento del laboratorio, sia nel riferimento in moto con il centro di oscillazione.
- b) Se nel riferimento in moto l'oscillatore si trova nello stato fondamentale, qual è la sua funzione d'onda nel riferimento del laboratorio?
- c) Supposta nota la funzione d'onda (nel laboratorio) $\psi(x, 0)$ all'istante $t = 0$, determinare la funzione d'onda $\psi(x, t)$ al tempo t . Verificare esplicitamente che $\psi(x, t)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo.

9.7

a) Nel riferimento in moto il centro di oscillazione è fermo quindi la hamiltoniana è

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Nel laboratorio il centro di oscillazione è nel punto di ascissa $x = vt$, quindi:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(q - vt)^2.$$

Si noti che (vedi Problema 9.6) $\tilde{H} = G^\dagger(v, t) H G(v, t) + i\hbar \dot{G}^\dagger(v, t) G(v, t)$.

b) Ogni stato $|A\rangle$ dell'oscillatore nel riferimento in moto è visto dal laboratorio come lo stato trasformato $|A^{\text{tr}}\rangle$ dello stato $|A\rangle$ quindi, siccome nel riferimento in moto $|0\rangle \xrightarrow{\text{RS}} \psi_0(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$, nel laboratorio (vedi Problema 9.6):

$$|0^{\text{tr}}\rangle \xrightarrow{\text{RS}} \psi_{0^{\text{tr}}}(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-(m\omega/2\hbar)(x-vt)^2} e^{imvx/\hbar}$$

(il fattore di fase $e^{-imv^2t/2\hbar}$ è inessenziale).

c) Prima risolviamo il problema nel riferimento in cui il centro di oscillazione è fermo (riferimento in moto), poi ritorniamo nel riferimento del laboratorio. Nel riferimento in moto la funzione d'onda $\tilde{\psi}(x, 0)$ all'istante $t = 0$ è

$$\tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x, 0) e^{-imvx/\hbar} \equiv \sum_n a_n \psi_n(x), \quad a_n = \int \psi_n^*(x) \tilde{\psi}(x, 0) dx$$

dove $\psi_n(x)$ sono le consuete autofunzioni della hamiltoniana dell'oscillatore armonico (cioè di \tilde{H}); quindi:

$$\tilde{\psi}(x, t) = \sum_n a_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \psi_n(x) \Rightarrow$$

$$\psi(x, t) = \sum_n a_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \psi_n(x - vt) e^{imvx/\hbar}.$$

Verifichiamo che i singoli termini della somma verificano l'equazione di Schrödinger (ripristiniamo il fattore di fase $e^{-imv^2t/2\hbar}$):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - vt)^2\right) \psi_n(x - vt) e^{imvx/\hbar} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} e^{-imv^2t/2\hbar}$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n''(x - vt) - i\hbar v \psi_n'(x - vt) + \frac{1}{2}m v^2 \psi_n(x - vt)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}m\omega^2(x - vt)^2 \psi_n(x - vt)\right) \times e^{imvx/\hbar} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} e^{-imv^2t/2\hbar}$$

$$= \left(\left(E_n + \frac{1}{2}m v^2\right) \psi_n(x - vt) - i\hbar v \psi_n'(x - vt)\right)$$

$$\times e^{imvx/\hbar} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} e^{-imv^2t/2\hbar}$$

$$\text{che coincide con } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} e^{-imv^2t/2\hbar} \psi_n(x - vt)\right) e^{imvx/\hbar}.$$

10.5 Una particella è soggetta al potenziale $V = V(q_1^2 + q_2^2, q_3)$.

- a) Dimostrare che la hamiltoniana $H_0 = \vec{p}^2/2m + V$ commuta con l'operatore di momento angolare $L_z = q_1 p_2 - q_2 p_1$.
- b) Utilizzare il teorema di degenerazione per dimostrare che esistono livelli energetici degeneri.
- c) Dire se e come la degenerazione viene rimossa se il sistema si trova su una piattaforma rotante attorno all'asse z con velocità angolare costante ω .

10.5

- a) Sia l'energia cinetica che il potenziale sono invarianti per rotazioni attorno all'asse z , quindi commutano con L_z .
- b) La hamiltoniana H commuta anche con l'operatore I_x di inversione rispetto al piano $x = 0$ (in effetti, grazie all'invarianza per rotazioni, rispetto a qualsiasi piano contenente l'asse z), ma I_x e L_z non commutano, quindi devono esistere livelli degeneri. Poiché $I_x L_z I_x^{-1} = -L_z$, se consideriamo gli autostati simultanei di H e L_z : $|E, m'\rangle$, si ha $I_x |E, m'\rangle \propto |E, -m'\rangle$, quindi tutti i livelli energetici con $m' \neq 0$ sono almeno due volte degeneri. Questo risultato vale indipendentemente dal potenziale, purché invariante per rotazioni attorno ad un asse e funzione solo delle q : da queste ipotesi segue l'invarianza per riflessioni.
- c) Nel riferimento rotante la hamiltoniana è (vedi Problema 9.10):

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(q_1^2 + q_2^2, q_3) - \omega L_z \equiv H_0 - \omega L_z$$

che ancora commuta con L_z , ma non commuta più con le inversioni (ora $V - \omega L_z$ non è più funzione delle sole q), quindi non è possibile garantire l'esistenza di livelli degeneri: in effetti gli stati $|E_0, m'\rangle$ e di $|E_0, -m'\rangle$ (quindi di H_0 e di L_z , hanno rispettivamente energie $E_0 \mp m' \hbar \omega$).

11.10 Si consideri una particella di massa m in tre dimensioni soggetta al potenziale centrale $V(r) = -\lambda/r^s$, dove $\lambda > 0$.

- a) Determinare la dipendenza da a del fattore di normalizzazione N , dei valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sugli stati di funzioni d'onda di prova $\psi(r; a)$ che dipendono da r e da a solo tramite il loro rapporto r/a : $\psi(r; a) = N f(r/a)$, $a > 0$.
- b) Utilizzare il risultato precedente per dimostrare che se $s > 2$ lo spettro della hamiltoniana non è limitato inferiormente.
- c) Utilizzare il metodo 'della buca inscritta' illustrato nel Problema 6.4 (vedi anche Problema 6.6) per dimostrare che se $0 < s < 2$ il sistema ammette un numero infinito di stati legati. In questo caso, dov'è rilevante che il potenziale abbia l'andamento r^{-s} : per $r \rightarrow 0$ o per $r \rightarrow \infty$?

11.10

$$\text{a) } 1 = N^2 \int |\psi(r; a)|^2 r^2 dr d\Omega = N^2 a^3 \int |f(\xi)|^2 \xi^2 d\xi d\Omega \Rightarrow N \propto a^{-3/2}.$$

Tenuto conto che $d^2 f(\xi)/dr^2 = a^{-2} d^2 f(\xi)/d\xi^2$, si ha:

$$\frac{\overline{p^2}}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} N^2 \int f^*(\xi) \xi^{-1} \frac{1}{a^2} \frac{d^2(\xi f(\xi))}{d\xi^2} a^3 \xi^2 d\xi d\Omega = \frac{c_1}{a^2}, \quad c_1 > 0.$$

Analogamente:

$$\overline{V(r)} = -\lambda N^2 \int |f(\xi)|^2 a^{-s} \frac{1}{\xi^s} a^3 \xi^2 d\xi d\Omega = -\frac{c_2}{a^s}, \quad c_2 > 0.$$

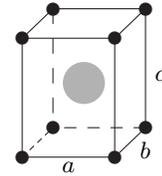
b) Il valor medio della hamiltoniana sugli stati di funzioni d'onda $\psi(r; a)$ è

$$\overline{H} \equiv h(a) = \frac{c_1}{a^2} - \frac{c_2}{a^s}, \quad c_1, c_2 > 0$$

e, quando $s > 2$, per a sufficientemente piccolo, $h(a)$ assume valori negativi arbitrariamente grandi. Ciò significa che lo spettro dell'operatore H quando $s > 2$ si estende a $-\infty$: questa situazione, priva di significato fisico, viene descritta come “caduta della particella nel centro” (vedi anche il Problema 12.11).

c) Limitiamoci, per cominciare, al caso dei livelli con $l = 0$: l'equazione di Schrödinger per la funzione radiale ridotta $u(r)$ è quella di una particella in una dimensione soggetta al potenziale $V(x) = -\lambda/x^s$ per $x > 0$ e $V(x) = \infty$ per $x \leq 0$ e, grazie alla condizione $u(0) = 0$, i livelli sono i livelli dispari della particella soggetta al potenziale $V(x) = -\lambda/|x|^s$ per $-\infty < x < \infty$. Poiché $V(x) < 0$ e $V(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$, per $E < 0$ la hamiltoniana può solo avere autovalori discreti; inoltre, la buca inscritta di larghezza $2a$ ha profondità $V_0 = \lambda/a^s$ e siccome $V_0 a^2 = \lambda a^{2-s}$ cresce indefinitamente al crescere di a , il numero di stati legati è infinito per ogni $\lambda > 0$, $0 < s < 2$. Siccome ciò che è rilevante per questo risultato è il comportamento del potenziale per $r \rightarrow \infty$, lo stesso risultato si ottiene per gli stati con $l > 0$, dato che per $s < 2$ il potenziale centrifugo non altera il comportamento asintotico di $V(r)$.

12.16 Un atomo di idrogeno si trova al centro di una cella di un cristallo costituito da atomi uguali, il cui reticolo ha la forma di un parallelepipedo rettangolo con spigoli a , b , c paralleli agli assi \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} .



- a) Tenuto conto della simmetria del reticolo cristallino, scrivere lo sviluppo del potenziale $V(x, y, z)$ al quale è soggetto l'atomo di idrogeno, fino al secondo ordine in $(x, y, z) \equiv \vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p$.

Si considerino i tre casi: *i*) $a = b = c$, *ii*) $a = b \neq c$, *iii*) $a \neq b \neq c \neq a$. Si approssimi $V(x, y, z)$ con il suo sviluppo $V^{(2)}$ al secondo ordine in x, y, z (poiché $V(x, y, z)$ è di origine elettrostatica si ha $V(0) = 0$).

- b) Per ciascuno dei suddetti casi dire quali fra le seguenti osservabili sono costanti del moto: L_x , L_y , L_z , \vec{L}^2 , I_x (riflessione rispetto al piano $x = 0$), I_y , I_z e, di conseguenza, cosa si può concludere sulla classificazione e sulla degenerazione dei livelli dell'atomo di idrogeno.

Si consideri ora $V^{(2)}(x, y, z)$ come una perturbazione.

- c) Calcolare l'effetto al primo ordine sui livelli $n = 1$ e $n = 2$ nel caso in cui a, b, c sono tutti diversi fra loro (caso *iii*): per gli stati con $n = 2, l = 1$ è conveniente l'uso della base cartesiana (vedi Problema 8.2) o, che è la stessa cosa, la base costituita dagli autovettori simultanei di I_x, I_y, I_z . Si utilizzi l'identità data nel testo del Problema 12.14 e:

$$\langle 2, 1, 0 | z^2 | 2, 1, 0 \rangle = \frac{3}{5} \langle 2, 1, 0 | r^2 | 2, 1, 0 \rangle.$$

Sia ora $a = b = c$ (cristallo cubico), e non approssimiamo $V(x, y, z)$ con $V^{(2)}$.

- d) È possibile che $V(x, y, z)$ rimuova completamente la degenerazione dei livelli dell'idrogeno?

12.16

a) Il reticolo è invariante per inversioni dei singoli assi, quindi:

$$V^{(2)}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2.$$

Se $a = b$, il reticolo è invariante per rotazioni di 90° attorno all'asse z , quindi $\alpha = \beta$; se $a = b = c$, allora $\alpha = \beta = \gamma$.

b) Se $\alpha = \beta = \gamma$ tutte le osservabili riportate nel testo sono costanti del moto; in questo caso $V^{(2)}$ è un potenziale centrale e gli autostati della hamiltoniana possono essere classificati come $|E, l, m\rangle$. La degenerazione su l dell'atomo di idrogeno viene rimossa e si può garantire solo la degenerazione $2l + 1$ su m .

Se $\alpha = \beta \neq \gamma$, le osservabili L_z, I_x, I_y, I_z sono costanti del moto; gli autostati della hamiltoniana possono essere classificati come $|E, m\rangle$, degeneri con $|E, -m\rangle$ ($I_x L_z = -L_z I_x$).

Se $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, solo I_x, I_y, I_z sono costanti del moto che commutano fra loro, quindi gli autostati della hamiltoniana possono essere classificati con gli autovalori w_x, w_y, w_z di questi operatori ($w_i = \pm 1$) e bisogna aspettarsi che i livelli siano tutti non degeneri.

c) Sugli stati s (cioè $l = 0$): $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3}\overline{r^2}$, quindi:

$$\Delta E_{1s}^{(1)} = \langle 1, 0, 0 | V^{(2)} | 1, 0, 0 \rangle = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \langle 1, 0, 0 | r^2 | 1, 0, 0 \rangle = (\alpha + \beta + \gamma) a_B^2.$$

Livello $n = 2$: $V^{(2)}$ non ha elementi di matrice diversi da zero fra lo stato $2s$ ($|2, 0, 0\rangle$) e gli stati $2p$ ($|2, 1, m\rangle$), che hanno parità opposta, quindi:

$$\Delta E_{2s}^{(1)} = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \langle 2, 0, 0 | r^2 | 2, 0, 0 \rangle = 14(\alpha + \beta + \gamma) a_B^2.$$

Gli stati $2p$, classificati con w_x, w_y, w_z , sono:

$$|+, +, -\rangle = |n = 2, l = 1, m_z = 0\rangle,$$

$$|+, -, +\rangle = |n = 2, l = 1, m_y = 0\rangle,$$

$$|-, +, +\rangle = |n = 2, l = 1, m_x = 0\rangle$$

e in questa base la perturbazione è diagonale (le terne di autovalori w_x, w_y, w_z sono tutte diverse). Sullo stato con $m_z = 0$ si ha $\overline{x^2} = \overline{y^2}$, quindi:

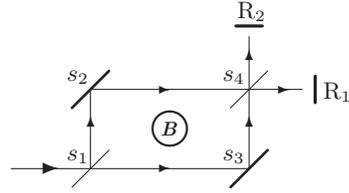
$$\begin{aligned} \Delta E_{2p, m_z=0}^{(1)} &= \alpha \overline{x^2} + \beta \overline{y^2} + \gamma \overline{z^2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) (\overline{x^2} + \overline{y^2}) + \gamma \overline{z^2} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) (\overline{r^2} - \overline{z^2}) + \gamma \overline{z^2} = [6(\alpha + \beta) + 18\gamma] a_B^2; \end{aligned}$$

analogamente:

$$\Delta E_{2p, m_y=0}^{(1)} = [6(\alpha + \gamma) + 18\beta] a_B^2; \quad \Delta E_{2p, m_x=0}^{(1)} = [6(\beta + \gamma) + 18\alpha] a_B^2.$$

d) La hamiltoniana $H_0 + V$ commuta con tutte le trasformazioni di invarianza del cubo (gruppo del cubo): rotazioni di 90° attorno a ciascuno dei tre assi ortogonali alle facce, rotazioni di 120° attorno alle diagonali del cubo, inversioni, eccetera: siccome il gruppo del cubo non è commutativo (infatti contiene il gruppo del quadrato: vedi Problema 10.2), per il teorema di degenerazione devono esistere livelli degeneri.

13.13 È possibile realizzare un interferometro per elettroni simile a quello di Bonse–Hart per i neutroni (vedi Problema 3.4). Al centro dell'interferometro viene posto un lungo solenoide di raggio a con l'asse ortogonale al piano delle traiettorie degli elettroni (vedi figura). L'interferometro è calibrato in modo che quando il campo magnetico all'interno del solenoide è nullo gli elettroni arrivano tutti sul rivelatore R_1 . Sia I l'intensità del fascio di elettroni (di energia E), \vec{B} il campo magnetico dentro al solenoide e $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ il potenziale vettore all'interno del solenoide.



a) Mostrare che il potenziale vettore fuori dal solenoide (dove $\vec{B} = 0$) è dato da

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{a^2}{2(x^2 + y^2)} \vec{B} \wedge \vec{r} = \frac{a^2 B}{2(x^2 + y^2)} (-y, x, 0), \quad \hat{z} \parallel \vec{B}.$$

Calcolare la circuitazione di $\vec{A}(\vec{r})$ lungo il circuito $s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_4 \rightarrow s_2 \rightarrow s_1$.

b) Mostrare che la funzione d'onda lungo ciascuno dei due percorsi $\gamma_1 = s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_4$ e $\gamma_2 = s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_4$ è data da:

$$\psi(x, y, z) = \exp\left(i \int (\vec{k} + (e/\hbar c) \vec{A}) \cdot d\vec{l}\right), \quad k = \sqrt{2m_e E}/\hbar$$

dove l'integrale è fatto dal punto di ingresso degli elettroni nell'interferometro fino al punto (x, y, z) , lungo il percorso al quale appartiene detto punto.

c) Calcolare lo sfasamento φ fra le componenti della funzione d'onda che arrivano su s_4 dai percorsi γ_1 e γ_2 e le intensità (vedi Problema 13.6) I_1 , I_2 degli elettroni rivelati dai contatori R_1 e R_2 .

[L'effetto è stato predetto da Aharonov e Bohm nel 1959.]

13.13

- a) \vec{A} è continuo sulla superficie del solenoide e fuori $\text{rot } \vec{A} = 0$. Per il teorema di Stokes la circuitazione di \vec{A} è data dal flusso di \vec{B} attraverso la superficie, cioè $\pi a^2 B$.
- b) Separatamente lungo ciascuno dei due percorsi il problema è unidimensionale con hamiltoniana $H = (p + (e/c)A_t)^2/2m$ (A_t è la componente di \vec{A} lungo il percorso), e quindi è identico a quello discusso nella prima domanda del Problem 13.7. Oppure: siccome la regione in cui $\text{rot } \vec{A} = 0$ non è semplicemente connessa, fuori dal solenoide $\vec{A}(\vec{r})$ è il gradiente di una funzione Φ a più valori ($\Phi = a^2 B \phi/2\sqrt{x^2 + y^2}$, dove ϕ è l'angolo azimutale attorno all'asse del solenoide); tuttavia, limitatamente a regioni semplicemente connesse come separatamente i due circuiti γ_1 e γ_2 , la funzione Φ è a un sol valore (Φ_1 su γ_1 , Φ_2 su γ_2) e pertanto il problema è identico a quello tridimensionale discusso nel Problema 13.7.
- c) Lo sfasamento φ è dato da:

$$\varphi = \int_{\gamma_1} (\vec{k} + (e/\hbar c) \vec{A}) \cdot d\vec{l}_1 - \int_{\gamma_2} (\vec{k} + (e/\hbar c) \vec{A}) \cdot d\vec{l}_2 = \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\pi a^2 e B}{\hbar c}$$

(la circuitazione di \vec{k} è nulla perché per ipotesi l'interferometro è ben calibrato). È notevole il fatto che lo sfasamento è proporzionale al flusso di \vec{B} , anche se agli elettroni sono accessibili solo regioni in cui $\vec{B} = 0$: questo fatto, noto come effetto Aharonov–Bohm, è stato verificato sperimentalmente. Si ha (vedi Problema 13.6):

$$I_1 = \frac{I}{2}(1 + \cos \varphi), \quad I_2 = \frac{I}{2}(1 - \cos \varphi).$$

14.6 All'interno di una cavità atomi con due livelli non degeneri E_a e E_b , $E_a < E_b$, sono all'equilibrio termico con la radiazione (*radiazione di corpo nero*).

- a) Quale deve essere la temperatura T della cavità affinché la probabilità di transizione fra i due stati di energie E_a , E_b indotta dalla radiazione nella cavità sia uguale alla probabilità di emissione spontanea $E_b \rightarrow E_a$? Effettuare il calcolo numerico nel caso $E_b - E_a = 1 \text{ eV}$.

La temperatura di corpo nero tipica di una lampada utilizzata in laboratorio per indurre transizioni in un sistema atomico è circa $T_L = 3000 \text{ K}$.

- b) Quant'è il rapporto fra l'intensità spettrale $I(\omega_{ba}, T)$ ($\omega_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar$) di un corpo nero alla temperatura T determinata nella domanda a) e l'intensità spettrale $I(\omega_{ba}, T_L)$ di una lampada alla temperatura $T_L = 3000 \text{ K}$?

14.6

- a) Sia $W_{b \leftarrow a} = W_{a \rightarrow b} \equiv W_{ab}$ la probabilità di transizione indotta fra i due stati e $w_{a \rightarrow b}$ la probabilità di emissione spontanea (integrata sugli angoli). La condizione di equilibrio termico fra radiazione e materia (atomi del tipo considerato) comporta che:

$$N_a \times W_{ab} = N_b \times (W_{ab} + w_{ab}), \quad \frac{N_a}{N_b} = e^{(E_b - E_a)/k_B T}$$

quindi la condizione $W_{ab} = w_{ab}$ richiede $N_a/N_b = 2 \Rightarrow (E_b - E_a)/k_B \bar{T} = \log 2 \Rightarrow \bar{T} = 1.67 \times 10^4 \text{ K}$.

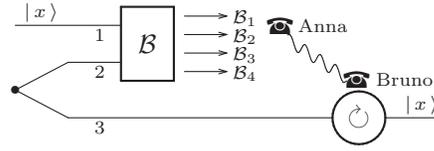
- b) L'intensità è proporzionale alla densità di energia:

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar \omega / k_B T} - 1)} \Rightarrow$$

$$\frac{I(\omega_{ba}, \bar{T})}{I(\omega_{ba}, T_L)} = \frac{e^{\hbar \omega_{ba} / k_B T_L} - 1}{e^{\hbar \omega_{ba} / k_B \bar{T}} - 1} = \frac{2^{\bar{T}/T_L} - 1}{2 - 1} = 46 \simeq \left(\frac{N_a}{N_b} \right)_{T_L}.$$

Quindi, siccome $w_{ab}/W_{ab} = N_a/N_b - 1$, in condizioni 'normali' ($T_L \simeq 10^3 \text{ K}$) l'emissione spontanea prevale su quella indotta.

15.17 Due particelle di spin $\frac{1}{2}$ (particelle 2 e 3) vengono prodotte in uno stato di singoletto e si allontanano in direzioni diverse. Un'altra particella di spin $\frac{1}{2}$ (particella 1), in uno stato di spin incognito $|x\rangle$, viaggia insieme alla particella 2. Lo stato di spin delle tre particelle è quindi $(\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle)$:



$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle_1 (|+\rangle_2 |-\rangle_3 - |-\rangle_2 |+\rangle_3), \quad |x\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle.$$

Sulle particelle 1 e 2 Anna misura una osservabile non degenere \mathcal{B} , i cui autostati (“stati di Bell”) sono:

$$|\mathcal{B}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |+\rangle_2 + |-\rangle_1 |-\rangle_2),$$

$$|\mathcal{B}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |+\rangle_2 - |-\rangle_1 |-\rangle_2),$$

$$|\mathcal{B}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2),$$

$$|\mathcal{B}_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2).$$

- a) Calcolare le probabilità dei 4 possibili risultati e per ciascuno dei risultati ottenuti determinare lo stato della terza particella dopo la misura.

Il risultato della misura viene comunicato a Bruno che, lontano da Anna, riceve la terza particella.

- b) Per ciascuno dei possibili risultati della misura sulle particelle 1 e 2, quale rotazione deve effettuare Bruno sullo stato di spin della terza particella affinché questo venga trasformato nello stato $|x\rangle$ in cui si trovava all’inizio la particella 1? (Teletrasporto quantistico di uno stato incognito $|x\rangle$.)

Supponiamo ora che lo stato di spin delle tre particelle sia:

$$|B\rangle = |x\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3.$$

- c) Calcolare la probabilità dei 4 possibili risultati della misura dell’osservabile \mathcal{B} e determinare lo stato della terza particella dopo la misura. In questo caso è possibile trasformare lo stato della terza particella nello stato $|x\rangle$ solo a partire dalla conoscenza del risultato della misura di \mathcal{B} sulle particelle 1 e 2?

15.17

a) Si ha:

$$\begin{aligned}
 |A\rangle &= \frac{1}{2} \left(\alpha(|\mathcal{B}_1\rangle + |\mathcal{B}_2\rangle) |-\rangle_3 - \alpha(|\mathcal{B}_3\rangle + |\mathcal{B}_4\rangle) |+\rangle_3 \right. \\
 &\quad \left. + \beta(|\mathcal{B}_3\rangle - |\mathcal{B}_4\rangle) |-\rangle_3 - \beta(|\mathcal{B}_1\rangle - |\mathcal{B}_2\rangle) |+\rangle_3 \right) \\
 &= \frac{1}{2} |\mathcal{B}_1\rangle (\alpha |-\rangle_3 - \beta |+\rangle_3) + \frac{1}{2} |\mathcal{B}_2\rangle (\alpha |-\rangle_3 + \beta |+\rangle_3) \\
 &\quad + \frac{1}{2} |\mathcal{B}_3\rangle (-\alpha |+\rangle_3 + \beta |-\rangle_3) + \frac{1}{2} |\mathcal{B}_4\rangle (-\alpha |+\rangle_3 - \beta |-\rangle_3)
 \end{aligned}$$

quindi i 4 risultati hanno tutti probabilità 1/4 e per ciascuno di essi lo stato della terza particella dopo la misura è

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}_1\rangle : |b_1\rangle_3 &\equiv \alpha |-\rangle_3 - \beta |+\rangle_3; & |\mathcal{B}_2\rangle : |b_2\rangle_3 &\equiv \alpha |-\rangle_3 + \beta |+\rangle_3; \\
 |\mathcal{B}_3\rangle : |b_3\rangle_3 &\equiv \alpha |+\rangle_3 - \beta |-\rangle_3; & |\mathcal{B}_4\rangle : |b_4\rangle_3 &\equiv \alpha |+\rangle_3 + \beta |-\rangle_3.
 \end{aligned}$$

b) Nella base $|+\rangle, |-\rangle$ (omettiamo l'indice 3) si ha:

$$|b_1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow |x\rangle = -i\sigma_y |b_1\rangle.$$

Analogamente $|x\rangle = \sigma_x |b_2\rangle, |x\rangle = \sigma_z |b_3\rangle, |x\rangle = |b_4\rangle$. L'operatore che effettua la rotazione di angolo ϕ attorno ad una direzione \hat{n} sugli stati di spin di una particella di spin $\frac{1}{2}$ è dato da (vedi Problema 13.2):

$$U(\hat{n}, \phi) = e^{\frac{1}{2}i\phi\vec{\sigma}\cdot\hat{n}} = \cos(\phi/2) + i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin(\phi/2)$$

quindi, a parte fattori di fase, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ implementano rotazioni di 180° rispettivamente attorno agli assi x, y, z . Se il risultato è \mathcal{B}_4 non deve essere effettuata nessuna rotazione.

c) $|x\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha(|\mathcal{B}_1\rangle + |\mathcal{B}_2\rangle) |-\rangle_3 + \beta(|\mathcal{B}_3\rangle - |\mathcal{B}_4\rangle) |-\rangle_3 \right)$

quindi le probabilità sono nell'ordine $\frac{1}{2}|\alpha|^2, \frac{1}{2}|\alpha|^2, \frac{1}{2}|\beta|^2, \frac{1}{2}|\beta|^2$. La particella 3 è sempre nello stato $|-\rangle$ che non contiene le informazioni relative allo stato $|x\rangle$, quindi il teletrasporto dello stato $|x\rangle$ in questo caso non è possibile.

16.12 L'analisi spettroscopica ha stabilito che un certo atomo, di cui si ignora l'identità, ha i seguenti livelli energetici in eV (E_0 è il livello fondamentale):

$$E_0 = 0, \quad E_1 = 1.7 \times 10^{-2}, \quad E_2 = 4 \times 10^{-2}, \quad E_3 = 7 \times 10^{-2}$$

separati di circa 0.3 eV dal livello successivo, per cui è ragionevole ritenere che i livelli $E_0 \cdots E_3$ costituiscano un multipletto di struttura fine. Anche se non è lecito aspettarsi che la regola degli intervalli di Landé ($E_{LS,J} - E_{LS,J-1} = A_{LS} J$) sia soddisfatta con buona approssimazione, tuttavia da essa si possono ottenere informazioni sia di carattere qualitativo che quantitativo.

- a) Dire se si tratta di un multipletto diretto ($A_{LS} > 0$) o invertito ($A_{LS} < 0$). Dire qual è il valore dello spin totale S e il minimo valore che può avere il momento angolare orbitale L . I valori del momento angolare totale J sono interi o semidispari?
- b) Avendo stabilito se J è intero o semidispari, determinare il valore J_0 del momento angolare totale del livello fondamentale che dà luogo alla migliore approssimazione della regola di Landé. Determinare L .
- c) Prese in considerazione tutte le configurazioni p^{n_1} e d^{n_2} per gli elettroni esterni ai gusci completi, dire qual è l'unica configurazione compatibile con i risultati trovati. Tenuto conto che l'ordine di riempimento degli orbitali è $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, \cdots$, dire qual è il primo atomo che ha la configurazione trovata.

16.12

a) Siccome la distanza fra i livelli aumenta, si tratta di un multipletto diretto. Il numero di livelli di un multipletto di struttura fine è uguale al più piccolo fra $2S + 1$ e $2L + 1$ ($|L - S| \leq J \leq L + S$): siccome i livelli sono 4 e $2L + 1$ è dispari, segue che $4 = 2S + 1$, quindi $S = 3/2$, $L > S \Rightarrow L \geq 2$. I valori di J sono semidispari.

b) Si può procedere in diversi modi. Conviene eliminare A_{LS} prendendo i rapporti:

$$\frac{E_3 - E_2}{E_1 - E_0} = \frac{J_0 + 3}{J_0 + 1} = \frac{3}{1.7}, \quad \frac{E_2 - E_1}{E_1 - E_0} = \frac{J_0 + 2}{J_0 + 1} = \frac{2.3}{1.7} \Rightarrow$$

$$1.3 J_0 - 2.1 = 0 \Rightarrow J_0 = 1.6; \quad 0.6 J_0 - 1.1 = 0 \Rightarrow J_0 = 1.8$$

da cui è evidente (ma si potrebbe usare il metodo dei minimi quadrati) che il semidispari che meglio risolve entrambe le equazioni è $J_0 = 3/2$. Quindi $L - S = 3/2 \Rightarrow L = 3$ (termine spettroscopico 4F).

c) Siccome $S = 3/2$, il numero di elettroni deve essere dispari e ≥ 3 ; inoltre, siccome il multipletto è diretto, l'orbitale esterno deve essere occupato per meno della metà (p^3 con $L = 3$ e $S = 3/2$ è anche escluso perché è uno stato completamente simmetrico; d^5 perché la regola di Hund vorrebbe $S = 5/2$). Resta quindi la configurazione d^3 . Il primo atomo che ha questa configurazione ha $Z = 23$: $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^3$ e quindi è il vanadio.

Appendice

Formule Utili

Funzione d'onda Gaussiana normalizzata:

$$|A\rangle \xrightarrow{\text{RS}} \psi_A(x) = (\pi a^2)^{-1/4} e^{-x^2/2a^2}; \quad |A\rangle \xrightarrow{\text{RI}} \varphi_A(p) = (\pi \hbar^2/a^2)^{-1/4} e^{-p^2 a^2/2\hbar^2}$$
$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} a^2, \quad \overline{x^4} = \frac{3}{4} a^4, \quad \overline{p^2} = \hbar^2/2a^2, \quad \overline{p^4} = 3\hbar^2/4a^4.$$

Autofunzioni normalizzate dell'oscillatore armonico:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} H_n(\sqrt{m\omega/\hbar} x) e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$
$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2.$$

Armoniche sferiche: $\int |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2 d\Omega = 1, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$
$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x \pm iy}{r}$$
$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$$
$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2}$$
$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z(x \pm iy)}{r^2}$$
$$Y_{2,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3\cos^2 \theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}.$$

Livelli energetici degli idrogenoidi: (massa nucleare infinita)

$$E_n = -Z^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} = -Z^2 \frac{e^2}{2n^2 a_B} = -Z^2 \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2} = -Z^2 \frac{R_\infty h c}{n^2} = -Z^2 \frac{13.6}{n^2} \text{ eV}.$$

Funzioni radiali degli idrogenoidi: $\int_0^\infty |R_{n,l}(\rho)|^2 \rho^2 d\rho = 1, \quad \rho = Z r/a_B$

$$R_{1,0}(\rho) = 2 e^{-\rho}; \quad R_{2,0}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\rho\right) e^{-\rho/2}; \quad R_{3,0}(\rho) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2\right) e^{-\rho/3}$$

$$R_{2,1}(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \rho e^{-\rho/2}; \quad R_{3,1}(\rho) = \frac{8}{27\sqrt{6}} \rho \left(1 - \frac{1}{6}\rho\right) e^{-\rho/3}$$

$$R_{3,2}(\rho) = \frac{4}{81\sqrt{30}} \rho^2 e^{-\rho/3}$$

Si noti: $\int_0^\infty \left| \left(\frac{Z}{a_B}\right)^{3/2} R_{n,l}(Zr/a_B) \right|^2 r^2 dr = 1.$

Matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k; \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij}.$$

Indice analitico

- Aharonov–Bohm (v. Effetto)
- Anomalia
dell'elettrone 13.9
del mesone μ 13.11
- Approssimazione
adiabatica 7.17
di campo debole 16.2
di campo forte 16.2
di dipolo (v. Radiazione)
impulsiva 7.14–7.16
- Atomi
esotici 2.4, 2.5; 12.19
in campo elettrico 12.13; 14.8; 16.3, 16.4
in campo magnetico 13.12; 16.2, 16.6
- Atomo
di elio e isoelettronici 1.3; 12.19;
16.4–16.7
di idrogeno e idrogenoidi
transizioni elettromagnetiche 14.3,
14.7, 14.8, 14.10
livelli energetici 5.6; 7.3; 11.9; 12.10,
12.20
perturbazioni esterne 12.13–12.16;
14.7, 14.8; 16.2, 16.3
perturbazioni interne 12.17, 12.18,
12.20; 16.1
effetto isotopico 2.3
vita media 1.2; 14.12
funzioni d'onda radiali 11.9
effetti relativistici 12.20
trasformazioni di scala 5.6; 11.9; 12.11
metodo variazionale 11.8
- Baker–Campbell–Hausdorff (identità) 4.13;
5.8; 7.8
- Beder–Wu (v. Oscillatore armonico)
- Bessel (equazione/funzione) 11.6, 11.7
- Bohr (magnetone) 2.4, 2.9; 13.3
- Bohr–Sommerfeld (quantizzazione)
2.6–2.10
- Bragg (riflessione) 2.14; 7.9
- Caduta nel centro 11.10; 12.11
- Calori specifici 1.6, 1.7; 2.11
- Coefficienti di riflessione e di trasmissione
6.12, 6.14, 6.15, 6.17, 6.19
- Coerenza
(lunghezza) 3.3
(tempo) 5.25
- Completezza 5.18; 6.17, 6.19
- Compton (v. Effetto)
- Configurazione elettronica 16.8–16.11
- Cristallo (unidimensionale) 1.8–1.10
- De Broglie (lunghezza d'onda) 2.14, 2.15;
3.4, 3.5; 13.7
- Degenerazione di scambio 12.3; 16.7
- Delta di Dirac (v. anche Potenziali)
normalizzazione 5.14, 5.23; 6.17, 6.19
- Densità di probabilità 5.19, 5.21, 5.22;
6.16; 10.4; 15.11
- Deuterio 2.3; 11.13
- Deutone 2.5; 15.15
- Diffrazione 3.6, 3.7, 3.12
- Effetto
Aharonov–Bohm 13.13
Compton 2.4
Hanbury Brown–Twiss 15.14
fotoelettrico 14.3
isotopico 2.3
Sagnac 3.5
Stark 12.13; 14.8; 16.3, 16.4
tunnel 6.13; 7.4
Zeeman 13.12; 16.2

Einstein–Podolsky–Rosen (paradosso) 15.16
 Elicità 13.11
 Equazione di Schrödinger
 in coordinate polari 11.1, 11.3
 in forma adimensionale 6.2, 6.3
 Fattore giromagnetico 13.9
 Fermi (energia/temperatura) 2.13
 Feynman–Hellmann (v. Teorema)
 Fluttuazioni quantistiche (v. Effetto
 Hambury Brown–Twiss)
 Funzione radiale ridotta 11.1–11.6, 11.9,
 11.12
 Funzioni d’onda Gaussiane (v. anche Stati
 coerenti) 5.17, 5.19; 7.6, 7.7, 7.9; 9.4,
 9.5, 9.9
 Galileo (v. Trasformazione)
 Green (v. Oscillatore armonico)
 Gruppo di invarianza
 del cubo 12.16
 dell’oscillatore armonico bidimensionale
 isotropo 10.7, 10.8
 del quadrato 10.2
 del triangolo equilatero 5.24
 Guida d’onda 10.4; 11.7
 Hanbury Brown–Twiss (v. Effetto)
 Hund (regola) 16.11, 16.12
 Integrale di scambio 12.3; 15.12; 16.7
 Interazione Spin–orbita 16.9
 accoppiamento LS 16.8, 16.10, 16.12
 accoppiamento jj 16.13, 16.14
 fattore di Landé 16.15
 regola degli intervalli di Landé 16.8,
 16.9, 16.12
 Interferenza
 da due fenditure (Young) 3.7, 3.9, 3.12,
 3.13; 4.11
 di fotoni (Mach–Zehnder) 3.1–3.3
 di neutroni (Bonse–Hart) 3.4, 3.5; 13.6,
 13.13
 visibilità 3.1, 3.9; 4.1
 Inversione temporale 5.20; 7.10
 Irraggiamento di sistemi classici 1.1–1.3
 Landau (v. Livelli energetici)
 Landé (v. interazione Spin–orbita)
 Limite classico 5.17; 7.2, 7.3, 7.6
 Livelli energetici
 idrogeno e idrogenoidi 5.6; 7.3; 11.9;
 12.10, 12.20
 di Landau 2.9; 13.9, 13.10
 repulsione (“no–crossing”) 12.12
 rotazionali di molecole poliatomiche
 15.2, 15.3
 rotazionali e vibrazionali di molecole
 lineari 11.12, 11.13
 sistema a due livelli 2.11; 7.13
 struttura fine 16.8–16.10, 16.12, 16.14,
 16.15
 Malus (legge) 3.8
 Matrice densità (v. Miscela statistica)
 Matrice di trasferimento 6.14, 6.19–6.21
 Meccanica statistica
 classica 1.6, 1.7
 quantistica 2.11–2.13
 Metodo variazionale 1.8; 6.4–6.8, 6.24;
 11.5, 11.8, 11.10
 Minima indeterminazione 5.9; 6.16; 7.16
 Miscela statistica 4.6–4.9, 4.14; 5.2, 5.19;
 14.10, 14.13; 15.4–15.7, 15.16
 Modi normali di vibrazione 1.3, 1.8–1.10
 Momento Angolare
 armoniche sferiche 8.1, 8.6, 8.7
 base cartesiana 8.2, 8.3, 8.11; 12.15,
 12.16
 base sferica 8.1, 8.3
 composizione 15.8–15.10
 del centro di massa 15.1–15.3
 orbitale 8.5, 8.7, 8.9, 8.10; 15.10
 regole di commutazione 4.12
 regole di selezione 8.8; 12.14
 stati con $l = 1$ 8.1, 8.2, 8.4, 8.6
 stati con $l = 2$ 8.6, 8.11
 Muonio (v. Atomi esotici)
 Oscillatore armonico
 bidimensionale 10.1, 10.6–10.8; 11.4
 tridimensionale 2.6, 2.7; 11.4; 14.1, 14.2,
 14.4, 14.5
 unidimensionale
 autofunzioni 5.14

- con il centro di oscillazione in moto
 - uniforme 9.7
 - correzioni anarmoniche 6.2, 6.3; 12.6, 12.7
 - metodo di Bender–Wu per gx^4 12.9
 - evoluzione temporale 7.1, 7.5
 - forzato 7.15–7.17
 - funzione di Green ritardata 7.15, 7.16
 - metodo variazionale 6.7
 - perturbazioni 12.5–12.9
 - regole di selezione su n 12.6
 - stati coerenti 5.10, 5.11; 7.5, 7.16, 7.17
 - valori medi 4.14, 4.15; 5.7, 5.12
- Osservabili
- come strumenti di misura 4.3, 4.4
 - compatibili 4.4, 4.5
 - rappresentazioni 5.1
- Particella vincolata
- in un segmento 2.6, 2.8, 2.10, 2.12; 7.2; 10.2; 11.2; 12.1
 - in una sfera 11.2
 - in un quadrato 10.2
 - in un triangolo 10.3
- Particelle identiche 15.12, 15.13
- Perturbazioni
- negli idrogenoidi 12.13–12.20; 16.1–16.3
 - nei sistemi unidimensionali 12.1–12.9
 - formule del terzo e quarto ordine 12.5
- Polarizzazione
- dei fotoni 3.8–3.11; 4.2, 4.3; 5.4
 - (grado) 5.2; 14.10
 - nelle transizioni elettromagnetiche 1.1; 14.4, 14.10, 14.13
 - (stato) (v. anche Miscela statistica) 3.8–3.11; 4.2, 4.3; 5.4
- Positronio (v. Atomi esotici)
- Potenziale/i
- centrale in due dimensioni 11.4, 11.6, 11.7
 - centrale in tre dimensioni 11.2, 11.5, 11.8–11.10; 12.11
 - in una dimensione
 - anarmonico $ax^4 (+bx^2)$ 6.2, 6.3, 6.8
 - buca infinita 2.6, 2.8, 2.10; 6.11; 7.2, 7.3
 - delta di Dirac 6.18, 6.19, 6.23–6.26; 12.1, 12.2
 - doppia buca 6.21, 6.23–6.25; 7.4
 - privo di riflessione ($\propto \cosh^{-2}(x/a)$) 6.17
 - $\propto (x/a)^{2k}$ 2.8
 - $\propto r^{-s}$ 11.10; 12.11
 - rettangolare 6.9–6.13
 - superpotenziale 6.22
- Principio di Pauli 2.13; 15.13, 15.15; 16.13
- Principio di sovrapposizione 4.1
- Postulato di von Neumann (collasso della funzione d'onda) 3.3; 4.5, 4.10; 5.25; 8.9
- Radiazione di dipolo
- distribuzione angolare 14.4, 14.10, 14.13
 - polarizzazione 1.1; 14.4, 14.8–14.10, 14.13
- Rappresentazione
- degli impulsi 5.14, 5.15, 5.20; 6.18
 - di interazione 7.11–7.13
 - di Schrödinger 5.13–5.16, 5.18, 5.20; 6.18
 - di stati e osservabili 5.1, 5.3, 5.5
- Regole di selezione
- sulla parità 6.1; 12.15
 - sul momento angolare 8.8; 12.14
 - su n (oscillatore armonico) 12.6
- Relazioni di indeterminazione 3.12–3.14; 4.12; 5.9
- Repulsione dei livelli 12.12
- Righe proibite o di intercombinazione 16.15
- Rotazioni (operatori) 8.3; 13.2
- Rutherford (v. Scattering)
- Sagnac (v. Effetto)
- Scattering
- di Rutherford 1.4, 1.5
 - (matrice) 6.15
 - (stati) 6.17, 6.19
- Schrödinger (v. Equazione di S.)
- Separazione delle variabili 2.7; 10.1–10.4, 10.6
- Sistema a due livelli 2.11; 7.13
- Sistema di riferimento 9.2, 9.3
- in caduta libera 9.9
 - in moto traslatorio 9.8
 - in moto uniforme 5.8; 9.6, 9.7

rotante 9.10; 10.5; 11.11, 15.3
 ruotato 9.5
 traslato 9.4
 Slater (determinante) 16.9, 16.10
 Sostituzione minimale 13.8
 per un sistema di due particelle 13.12
 Spettroscopia e costanti fondamentali
 2.1–2.5
 Spin $\frac{1}{2}$
 (stati) 13.1, 13.4
 (rotazioni) 13.2, 13.6
 Stark (v. Effetto)
 Stati coerenti 5.9–5.11, 5.15; 7.5, 7.16, 7.17
 Stati correlati (“Entangled”) 13.5; 15.4,
 15.16
 Stati di singoletto e di tripletto 15.5–15.7
 Stern–Gerlach (apparato) 13.3–13.5; 15.7
 Struttura fine
 (costante) 2.2; 12.20; 14.1, 14.11
 (multipletti) 16.8–16.10, 16.12, 16.14,
 16.15
 Superpotenziale (v. Potenziale/i)
 Teletrasporto quantistico 15.17
 Teorema
 del viriale 5.7; 12.11
 di degenerazione 5.24; 6.1; 10.5; 11.11;
 12.3, 12.16
 di Feynman–Hellmann 12.10, 12.11
 di “no-crossing” 12.12
 di non degenerazione 6.1
 di von Neumann 5.6, 5.8; 10.8
 di Wigner 9.1
 Termini spettrali (v. Configurazione
 elettronica)
 Thomson (modello atomico) 1.1–1.5
 Transizioni elettromagnetiche
 radiazione coerente 14.1, 14.2
 radiazione incoerente 14.1, 14.2
 indotte dalla radiazione di corpo nero
 14.6, 14.7
 Trasformazione/i
 canonica 5.7, 5.8, 5.24; 8.8; 9.4, 9.8,
 9.10; 10.1; 13.7, 13.8, 13.12
 di Galileo 5.8; 9.6
 di gauge 13.7–13.9
 di stati e osservabili 9.2, 9.3
 di scala 5.6, 5.23; 6.2; 11.9; 12.11; 16.5
 Traslazioni (operatori) 5.8
 Vita media 1.2; 2.4; 3.3, 3.14; 14.5, 14.7,
 14.11, 14.12; 16.15
 von Neumann (v. Teorema, v. Postulato)
 Wigner (v. Teorema)
 Zeeman (v. Effetto)