Presentazione

Ma la cosa strana è appunto che con quei valori immaginari
o in qualche modo impossibili si possano tuttavia compiere
le ordinarie operazioni e alla fine ottenere un risultato tangibile! [. . .]
Non ti fa pensare a un ponte di cui ci sono solo i pilastri a un capo e all'altro,
e che uno attraversa tranquillo come se ci fosse tutto intero?
Io non ho mai messo in dubbio che la matematica abbia ragione;
solo mi sembra strano che certe volte, si direbbe, va contro la ragione [. . .]
Robert Musil

Lo scopo dell'esposizione che segue è quello di esaminare i problemi e le ricerche che nel periodo indicato hanno portato alla costituzione della logica matematica contemporanea. Il cosiddetto programma di Hilbert in sé è un episodio che ha avuto una breve vita ma ha svolto un ruolo decisivo catalizzando, per la formazione degli strumenti necessari per la sua realizzazione, un ampio spettro di contributi e interessi.

Per quel che riguarda la nascita della logica matematica, nella tradizione storiografica si traccia di solito una linea che va da Gottlob Frege (1848-1925) a Bertrand Russell (1872-1970), dal 1879 al 1910, magari facendola passare con qualche fatica per George Boole (1815-1864) e Giuseppe Peano (1858-1932); il percorso conduce all'invenzione dei linguaggi simbolici formali e del sistema logico dei *Principia mathematica* nonché al fiorire della filosofia analitica. La logica del primo e del secondo ordine che si sono definite in seguito sarebbero state ritagliate dalla logica dei *Principia*. Si tratta di un racconto troppo semplificato, dovuto più che altro alla mancata considerazione della storia della matematica, a sua volta dovuta al pregiudizio che in essa non possa esservi nulla di filosoficamente interessante.

Senza voler sminuire l'importanza della faticosa elaborazione della teoria dei tipi da parte di Russell[1], la logica che viene presentata nel primo manuale

[1]Gödel nel 1930 farà riferimento proprio ai *Principia mathematica*, insieme alla teoria di Zermelo-Fraenkel, come uno dei due sistemi allora ritenuti onnicomprensivi di tutta la matematica esistente. Gödel più precisamente afferma nell'introduzione del suo lavoro sull'incompletezza che nei due sistemi sono incluse tutte le tecniche e le forme dimostra-

contemporaneo, i *Grundzüge der theoretischen Logik* di David Hilbert (1862-1943) e Wilhelm Ackermann (1896-1962) del 1928, nonostante la parentela con quella di Russell ha alle spalle una storia diversa, se pure non disgiunta e non insensibile alle influenze del logicismo[2]. Le sue radici affondano in tre problematiche indipendenti e interne alla matematica, quella della assiomatizzazione della teoria degli insiemi, quella dell'algebra della logica consolidata come disciplina da Ernst Schröder (1841-1902) ([Schröder 1895]), e quella della particolare proposta fondazionale che Hilbert ha iniziato a concepire nel 1904 e ha ripreso in modo esplicito e sistematico a partire dal 1917, partendo dalla sua visione della natura e del ruolo del metodo assiomatico.

Lo sviluppo dell'esposizione sarà dunque, in un conciso riassunto, il seguente. Innanzi tutto si presenteranno le questioni fondazionali sul tappeto all'inizio del Novecento, che si possono distinguere in due sfide. Da una parte la richiesta di Hilbert di dimostrare la non contraddittorietà[3] della teoria dei numeri reali, che egli presenta assiomaticamente nel 1900; dall'altra la necessità di risolvere le contraddizioni emerse nella teoria degli insiemi sviluppata da Georg Cantor (1845-1918).

La teoria degli insiemi era stata assiomatizzata nel 1908 da Ernst Zermelo (1871-1953), portando a intersecare le due problematiche; un aspetto insoddisfacente della sua proposta consisteva nell'uso della nozione di "proprietà definita" [*definit*] nell'assioma di esistenza dei sottoinsiemi, una nozione in verità poco definita. I tentativi di darne una versione precisa portano, attraverso il lavoro di Hermann Weyl(1885-1955) e di Thoralf Skolem (1887-1963) a individuare quelle che diventeranno le formule dei linguaggi del primo ordine.

Intanto, le contraddizioni che possono emergere nel lavoro con i nuovi concetti insiemistici dei numeri cardinali e ordinali erano note a Cantor, a Hilbert e a Zermelo almeno a partire dal 1895. Le loro reazioni non sono

tive della matematica. Apparentemente questo gli farebbe gioco per dare un significato assoluto al risultato di incompletezza, ma Gödel non segue questa strada, anzi dichiara più volte (in uno scambio epistolare con Ernst Zermelo della fine del 1931 per esempio) che il risultato dipende dall'uso di metodi dimostrativi ristretti. Questi concetti e queste apparenti incongruenze dovranno risultare chiarite alla fine del nostro studio.

[2]Le somiglianze estrinseche appaiono forti se, seguendo peraltro l'abitudine di Russell, si lasciano cadere i simboli di tipo dal linguaggio dei *Principia*, rispettando solo mentalmente i loro vincoli; la precisione formale peraltro, per quel che riguarda assiomi e regole, non era il forte di Russell. Gödel esprimerà la sua delusione per l'approssimazione della presentazione della logica nei *Principia* fin dalla sua prima lettura (si veda lettera a H. Feigl del 24 settembre 1928 in [Gödel 2009a, p.228]).

[3]In italiano sinonimi di non contraddittorietà sono "coerenza" e "consistenza", quest'ultima parola molto usata; preferiamo evitarla perché è derivata per assonanza dall'inglese *consistency* ma ha nell'italiano corrente un altro significato.

isteriche: Cantor pensa che le contraddizioni siano evitabili con opportune distinzioni[4]; Hilbert vi vede inizialmente solo il segno della impossibilità di assiomatizzare la teoria. Quando tuttavia nel 1903 Russell pubblica la sua antinomia, Hilbert ritiene che il problema debba essere affrontato per le corna e si debba trovare come escludere definitivamente il dubbio della possibilità di contraddizioni nella matematica; nel 1904 propone un modo di fondare assiomaticamente la logica e l'aritmetica attraverso una dimostrazione diretta di non contraddittorietà.

Il metodo usato fino ad allora consisteva nel ridurre la non contraddittorietà di una teoria a quella di un'altra, supposta già non contraddittoria, ovvero nel dimostrare la non contraddittorietà della prima relativamente alla seconda attraverso una interpretazione della prima nella seconda[5]; tale metodo deve necessariamente avere un punto di arresto. A fine Ottocento i successivi rimandi hanno portato tutte le teorie classiche a essere dipendenti, per la loro non contraddittorietà, da quella dell'aritmetica, o teoria dei numeri naturali. Una dimostrazione di non contraddittorietà assoluta non può basarsi che sulla definizione, secondo cui una teoria è non contraddittoria se dai suoi assiomi non si deriva alcuna contraddizione. L'alternativa di proporre un modello in cui gli assiomi siano veri rinvia alla non contraddittorietà della teoria nella quale si definiscono i modelli.

Una dimostrazione di non contraddittorietà in questo senso assoluto deve allora essere una dimostrazione che riguarda le dimostrazioni – la non esistenza di una dimostrazione di una contraddizione – cioè una dimostrazione che si riferisce a successioni di formule e di frasi. Perché essa sia una vera dimostrazione matematica, i suoi oggetti devono essere enti matematici; Hilbert pensa di poter risolvere la difficoltà affermando che i simboli sono oggetti concreti, e quindi assoggettabili a manipolazioni combinatorie matematiche che non differiscono da quelle concrete. Il vantaggio aggiuntivo di usare questa matematica è che dà maggior sicurezza alle sue conclusioni.

Nel 1904 Hilbert dà solo un esempio di una tale dimostrazione di non contraddittorietà per un frammento molto semplice di aritmetica. Negli anni venti riprende il suo programma, questa volta in reazione alla minaccia per la matematica classica rappresentata dall'intuizionismo; il lavoro della sua

[4]Tra insiemi "compiuti" [*fertig*] e no, o in seguito tra totalità consistenti [*konsistent*] e inconsistenti. In Cantor "consistente" è diverso da "non contraddittorio" [*widerspruchfrei*], benché si manifesti talvolta un'ambigua tendenza trascinata dalle traduzioni in lingua inglese a ritenerli collegati.

[5]Così ad esempio si dimostrava la non contraddittorietà relativa reciproca della geometria euclidea e di quella non euclidea, o la non contraddittorietà relativa della geometria euclidea rispetto alla teoria dei numeri reali, quest'ultima attraverso l'interpretazione data dalla geometria analitica.

scuola, con i contributi esterni di Skolem, incomincia ad accumulare risultati che diventeranno il nucleo della teoria logica, dall'esistenza dei modelli numerabili ad anticipazioni del teorema di completezza logica (dimostrato da Gödel nel 1929). Alla fine degli anni venti, una disputa tra Zermelo e Skolem renderà ufficiale e canonica la distinzione tra la logica del primo ordine e quelle del secondo ordine o infinitarie.

Per dare un valore scientifico alle procedure che intende utilizzare, Hilbert pensa a una nuova disciplina, che chiama "metamatematica"; in essa si dovrebbero affrontare, con gli strumenti da lui indicati, diverse questioni "di tipo gnoseologico" relative alle dimostrazioni. La non contraddittorietà delle teorie fondamentali è solo una di tali questioni, e anche la richiesta della sua dimostrazione deve cercare una giustificazione che non sia puramente difensiva. Questa nuova giustificazione viene trovata nel corso dell'elaborazione del programma e delle discussioni con Brouwer e Weyl, e si esprime in quello che è detto talvolta il Programma di Hilbert, con "P" maiuscola. La nuova disciplina non decolla tanto facilmente tuttavia, nonostante risultati parziali ovviamente decantati da Hilbert, in parte perché è attardata dalla costruzione hilbertiana della logica stessa[6] e in parte forse proprio per l'ambiguità sulla natura matematica dei simboli, che si riflette sugli strumenti matematici ammissibili; fino a quando Kurt Gödel (1906-1978) nel 1930 non ha l'idea di dichiarare che i simboli sono numeri.

Magari non si sa che cosa sono i numeri, ma certo si può concordare che sono enti matematici ai quali si possono applicare tutte le risorse dell'aritmetica, opportunità che Gödel mette subito a frutto dimostrando due teoremi che affossano le speranze di Hilbert di una dimostrazione di non contraddittorietà dell'aritmetica.

L'idea che i simboli sono numeri per diventare operativa richiede che si dimostri che le usuali manipolazioni sintattiche (ad esempio la congiunzione di due frasi, la sostituzione di un termine a una variabile) sono in effetti operazioni aritmetiche. Gödel lo verifica, con una trattazione che viene chiamata aritmetizzazione dei linguaggi, mettendo le basi della possibilità oggi nota a tutti di elaborare su un calcolatore, che lavora con i numeri in rappresentazione binaria, qualunque discorso relativo a qualunque argomento, scientifico o letterario. Questa è stata la parte decisiva e duratura del lavoro di Gödel, con la quale egli ha dimostrato che il progetto di Hilbert di una metamatematica era possibile. Nel contempo tuttavia, con un'altra ingegnosa soluzione, Gödel stesso dimostra l'opposto di quelle che erano le aspettative di Hilbert.

Dopo il 1930 si continuerà naturalmente a discutere se il programma di Hilbert, inteso restrittivamente come ricerca di una dimostrazione di non

[6] Vedremo come Hilbert perfezioni progressivamente il suo sistema di logica.

contraddittorietà per l'aritmetica, sia davvero stato affossato da Gödel, o se possa essere resuscitato, opportunamente riformulato, o modificato; Gödel stesso contribuirà alla discussione[7]. Ma è fuori di dubbio che nella forma originaria il programma è stato falsificato nello stesso momento che se ne dimostrava la fattibilità attraverso l'aritmetizzazione. Il programma di Hilbert non vive tuttavia solo quest'attimo fuggente: a parte il fatto che una previsione, o una speranza sbagliate su quello che sarà possibile dimostrare non inficia il valore della originale concezione di un progetto, le tecniche e le dimostrazioni di Gödel, più che l'enunciato dei suoi teoremi, costituiranno la base della nascita della teoria della calcolabilità e faranno decollare la logica matematica come nuova disciplina.

Dopo l'approfondimento della storia sopra accennata, delle questioni fondazionali, della elaborazione dei concetti della logica del primo ordine, della nascita e primi vagiti della metamatematica, nella seconda parte sarà presentata una esposizione dettagliata della dimostrazione del primo teorema di incompletezza di Gödel[8].

[7]In particolare, oltre che con le osservazioni avanzate immediatamente a ridosso del teorema, con il lavoro [Gödel 1958] su *Dialectica*.

[8] Il professor Ruggero Ferro, dell'Università di Verona, ricorda di aver seguito alla UCLA, alla fine degli anni sessanta, un corso dedicato al primo teorema di incompletezza tenuto da Alonzo Church, che dichiarò all'esordio che almeno una volta nella vita bisogna vedere in tutti i dettagli la dimostrazione – che richiese 70 ore.