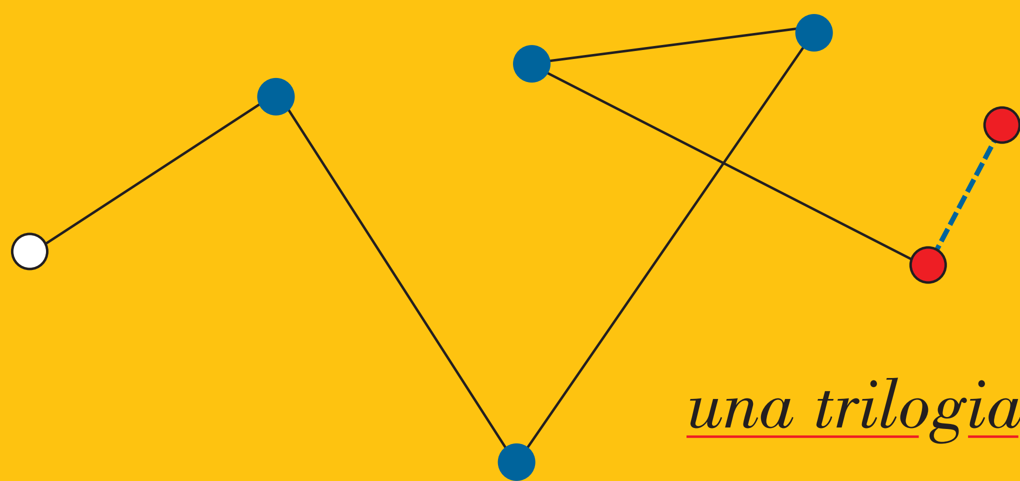
Nicolò Pintacuda

Invito alle Catene di Markov



una trilogia

- Un corso minimo sulle catene di Markov
- Passeggiata a caso in una rete
- Variazioni su tema di Markov

edizione elettronica

Edizioni ETS

www.edizioniets.com

isbn: 978-884672367-3

passeggiata a caso in una rete

DI NICOLÒ PINTACUDA

Immaginiamo un mobile che si sposti da un nodo all'altro di una rete, ogni volta scegliendo a caso con ugual probabilità tra i nodi contigui a quello momentaneamente occupato†.

Qual è la probabilità di visitare determinate regioni della rete ? quale quella di allontanarsi più che tanto dal nodo di partenza ? e quella di tornarvi, prima o poi ?

Interrogativi del genere formano oggetto della presente esposizione, di natura essenzialmente didattica.

Tecnicamente, il processo aleatorio descritto è un esempio di catena di Markov; anche se cercherò di rendere autosufficiente questa trattazione, il lettore potrà sempre fare riferimento al mio *corso minimo sulle catene di Markov* (luglio 2004), che qui citerò con la sigla [CMCM].

1. introduzione

Una *rete* è un insieme (che sempre tacitamente supporremo *numerabile*) di *nodi* variamente collegati tra loro. Due nodi si dicono *adiacenti* se sono tra loro direttamente collegati da un tratto di rete.

La struttura di una rete è ben descritta dalla funzione (di adiacenza) $A(x, y)$, che vale 1 se i nodi x e y sono adiacenti e zero se non lo sono; supporremo la funzione A simmetrica nei suoi argomenti (cioè $A(x, y) = A(y, x)$), a significare che tutti i percorsi si presumono a doppio senso di marcia.

Supporremo anche che la rete sia *connessa* (da qualsiasi nodo, spostandosi via via a nodi adiacenti, sia possibile arrivare a qualsiasi altro).

Faremo soprattutto l'ipotesi che, per ogni dato nodo x, il numero di nodi adiacenti a x, chiamato *grado* di x e dato da $d(x) = \sum_y A(x, y)$, sia *finito*.

† come sempre in matematica, questa è una raffigurazione astratta e schematizzata di svariate possibili situazioni concrete: collegamenti stradali, connessioni telefoniche, legami di parentela, etc.

Assegnata una rete, vi ambientiamo una passeggiata a caso definendo le probabilità "di transizione" da x a y:

$$\mathrm{P}(x,y) = \frac{A(x,y)}{d(x)}$$

In tal maniera, il modello descrive un mobile che ad ogni istante passa da un nodo ad uno dei nodi adiacenti con ugual probabilità.

Un primo problema importante concerne le probabilità di visita.

Dato un insieme G di nodi e un nodo o fuori di esso, cerchiamo la probabilità $u_{o,G}(x)$ che una passeggiata partita dal nodo x visiti l'insieme G *senza prima aver visitato il nodo o*.

La funzione incognita $u(x) = u_{o,G}(x)$ deve obbedire alle ovvie condizioni $u(o) = 0$ (una passeggiata partita da o ha già banalmente visitato o) e $u(x) = 1$ per $x \in G$ (se parte dall'insieme, lo visita alla partenza).

Meno ovvio cosa accade negli altri nodi (chiamiamoli "liberi"); esaminando le transizioni possibili a partire da x si ottiene la relazione

$$u(x) = \sum_y \mathrm{P}(x,y)\, u(y) = \frac{1}{d(x)} \sum_y A(x,y)\; u(y)$$

Il valore della funzione u in un nodo libero è dunque la media aritmetica dei suoi valori nei nodi ad esso adiacenti (si usa dire che la funzione è *armonica*). Riassumendo:

La probabilità di visitare G prima di o come funzione del nodo di partenza

$$\text{vale 1 in } G, \text{ si annulla in } o, \text{ è armonica nei nodi liberi} \tag{1.1}$$

In certi casi, le condizioni (1.1) bastano a determinare la funzione incognita.

(1.2) Esempio. I nodi siano gli interi da -10 a $+10$, siano adiacenti i nodi consecutivi; fissiamo $o = 0$ e $G = \{-10, +10\}$; la probabilità $u(x)$ di visitare G partendo da x senza essere prima passati da 0 è nulla in 0 e vale 1 per $x = 10$ e $x = -10$; in ogni altro nodo x la funzione è armonica, ossia pari alla semisomma dei valori nei nodi adiacenti $x+1$ e $x-1$.

In altri termini, è una funzione lineare, data da

$$u(x) = \frac{|\,x\,|}{10} \tag{1.3}$$

Nell'esempio in questione, le condizioni (1.1) inviduano una soluzione unica. Siffatta unicità si ha sempre quando la rete è finita.

2. probabilità di visita in una rete finita

D'ora in poi, sino ad esplicito avviso contrario, limiteremo la discussione alle reti *finite*, aventi cioè un numero finito di nodi.

Prima di mostrare che il problema (1.1) ha soluzione unica quando la rete è finita, serve un lemma preliminare.

(2.1) LEMMA. *Una funzione nulla in un insieme (non vuoto) e armonica nel complementare è identicamente nulla.*

DIM. a) Facciamo vedere dapprima che una funzione f, nulla nell'insieme non vuoto H e armonica nel complementare, è necessariamente positiva.

Supposto per assurdo che f assuma un minimo m strettamente negativo nel nodo c (ovviamente fuori di H), essa deve assumerlo in tutti i nodi adiacenti, come risulta dall'uguaglianza

$$\sum_y A(c,y)\big(f(y)-m\big) = d(c)\big(f(c)-m\big) = 0$$

quando si noti che $f(y)-m \geq 0$; dato che la rete è connessa, di nodo in nodo si giunge ad un nodo di H, dove la funzione si annulla. Pertanto $m=0$.

b) Applicando quanto provato alla funzione $-f$, il lemma ne consegue.$\diamondsuit$

(2.2) COROLLARIO. *La soluzione del problema* (1.1) *è unica.*

DIM. La differenza tra due soluzioni è una funzione nulla nell'insieme $G\cup\{o\}$ e armonica nel complementare. $\diamondsuit$

Un secondo corollario, particolarmente significativo, è poi il seguente.

(2.3) COROLLARIO. *Partendo da un nodo qualsiasi, con probabilità* 1 *la passeggiata visita tutta la rete.*

DIM. Fissato il nodo a, sia $g(x)$ la probabilità, partendo da x, di *non* visitare a; la funzione g si annulla banalmente in a.

Ragionando come si fece sopra per la probabilità di visita con restrizione di priorità, si riconosce che la funzione g è armonica fuori di a †.

Dunque si annulla identicamente, vale a dire che la passeggiata visita a con probabilità 1. La conclusione segue, giacché x e a erano arbitrari. $\diamondsuit$

Torniamo un momento alla situazione dell'Esempio (1.2) e alla probabilità di visitare $\{-10,+10\}$ senza avere prima visitato 0 come funzione del nodo di partenza, data dalla semplice formula (1.3).

La funzione, nulla nell'origine, cresce regolarmente verso il valore 1 agli estremi senza oscillazioni superflue; in qualche modo, la condizione di armonicità impone alla funzione "di variare il meno possibile", compatibilmente con l'obbligo di passare dal valore 0 al valore 1.

Si tratta, come vedremo, di un fenomeno generale.

† vedi anche [CMCM], pag. 2

3. il principio di minima variazione

Disponiamoci ad esaminare la questione della "variabilità" della funzione probabilità di visita (sempre con l'intesa di trattare reti finite).

Una ragionevole misura di variabilità di una funzione f dei nodi è data dalla quantità

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} A(x,y) \, \big(f(x) - f(y)\big)^2 \tag{3.1}$$

che, per analogia con i circuiti elettrici, vien detta *energia*† della funzione f.

Notiamo che $\mathcal{E}(f) = 0$ comporta che f assume lo stesso valore in nodi adiacenti (dato che la rete è connessa, vuol dire che f è costante).

Mi servirò di un paio di comode abbreviazioni.

Per due funzioni f e g sull'insieme dei nodi scriverò

$$(f, g) = \sum_x d(x) f(x) g(x) \tag{3.2}$$

e introdurrò la funzione Δf definita da

$$\Delta f(x) = f(x) - \sum_y P(x,y) f(y) = f(x) - \frac{1}{d(x)} \sum_y A(x,y)\, f(y) \tag{3.3}$$

Una funzione f è dunque armonica nel nodo a quando Δf si annulla in a.

(3.4) Lemma. *Si ha* $\mathcal{E}(f+g) = \mathcal{E}(f) + \mathcal{E}(g) + 2\,(f, \Delta g)$

Dim. Svolgendo il calcolo di $\mathcal{E}(f+g)$ si ottiene

$$\mathcal{E}(f) + \mathcal{E}(g) + \sum_{x,y} A(x,y) f(x) [g(x) - g(y)] + \sum_{x,y} A(x,y) f(y) [g(y) - g(x)]$$

Per la simmetria della funzione $A(x,y)$, le ultime due somme sono uguali, e ciascuna vale

$$\sum_x f(x) \sum_y A(x,y)[g(x) - g(y)] = \sum_x d(x) f(x) \sum_y \mathrm{P}(x,y)[g(x) - g(y)] =$$

$$= \sum_x d(x) f(x) \Delta g(x) = (f, \Delta g) \qquad \diamondsuit$$

---

† è la potenza dissipata quando nodi adiacenti sono connessi da resistori unitari e ciascun nodo x viene mantenuto a potenziale elettrico $f(x)$ (il fattore $1/2$ tiene conto che ogni resistore compare due volte nella somma)

Prendendo $g = f$ e notando che $\mathcal{E}(2f) = 4\,\mathcal{E}(f)$ si ricava di conseguenza

(3.5) LEMMA. *Si ha* $\mathcal{E}(f) = (f, \Delta f)$.

E veniamo al principio di minimo (detto di Kelvin, per le solite analogie elettriche).

(3.6) TEOREMA. *Tra le funzioni nulle in o che valgono 1 nell'insieme G, la probabilità $u_{o,G}(x)$ (che una passeggiata partita dal nodo x visiti l'insieme G senza prima aver visitato il nodo o) è quella di energia minima.*

DIM. Abbreviamo $u_{o,G}$ in u. Data f nulla in o e uguale a 1 in G, poniamo $g = f - u$. Poiché Δu si annulla nei nodi liberi, mentre g si annulla fuori, si ha $(g, \Delta u) = 0$. Dal lemma (3.4) si ottiene allora

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(g) + \mathcal{E}(u) + 2(g, \Delta u) = \mathcal{E}(g) + \mathcal{E}(u) \geq \mathcal{E}(u)$$

con uguaglianza solo quando $\mathcal{E}(g) = 0$, ossia quando g è costante (e pertanto nulla, dato che in o si annulla per costruzione).

Il teorema è provato. ◇

Resta da capire il significato probabilistico dell'energia minima che interviene nel principio di Kelvin.

Mantenendo l'abbreviazione $u = u_{o,G}$, tenendo conto che $u(o) = 0$ e usando il lemma (3.5), facilmente si calcola:

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(1-u) = (1-u, \Delta(1-u)) = (1-u, -\Delta u) = d(o) \sum_y \mathrm{P}(o,y)\, u(y)$$

Nella somma scritta a destra si riconosce subito la probabilità, partendo da o, di visitare G senza essere prima tornati al nodo o di partenza; in mancanza di nomi migliori, la battezzerò *probabilità di escursione* (da o a G) e la denoterò con $q(o, G)$. Concisamente:

$$d(o)\, q(o,G) = \mathcal{E}(u_{o,G}) \tag{3.7}$$

Alla luce della (3.7) e del principio di Kelvin, è facile calcolare maggiorazioni per la probabilità di escursione: basta prendere una funzione f che valga 1 in G e sia nulla in o, e sfruttare la disuguaglianza $d(o)\, q(o,G) \leq \mathcal{E}(f)$. Su questo punto avrò occasione di tornare.

Intanto mi soffermo su una notevole proprietà di simmetria.

Dato che f e $1 - f$ hanno la stessa energia, l'insieme delle energie delle funzioni che valgono 1 in b e sono nulle in a coincide con quello delle energie delle funzioni che valgono 1 in a e sono nulle in b; uguali saranno i rispettivi minimi, dati uno da $\mathcal{E}(u_{a,b})$ e l'altro da $\mathcal{E}(u_{b,a})$.

Ne discende la curiosa *relazione di reciprocità*

$$d(a)\,q(a,b) = d(b)\,q(b,a) \tag{3.8}$$

L'ovvia constatazione che nessuna probabilità è maggiore di 1 ne fa scaturire l'inattesa maggiorazione

$$q(a,b) \le \frac{d(b)}{d(a)} \wedge 1 \tag{3.9}$$

È facile migliorare questa stima usando le idee esposte poco sopra. Siano a e b due nodi *non adiacenti* e definiamo una funzione f ponendo $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f(x) = s$ in tutti gli altri nodi.

L'energia di f si scrive "a mano" e ne risulta

$$d(a)\,q(a,b) \le \mathcal{E}(f) = \sum_x A(a,x)s^2 + \sum_y A(b,y)(1-s)^2 = s^2 d(a) + (1-s)^2 d(b)$$

per s arbitrario. La scelta più furba† si rivela $s = \frac{d(b)}{d(a)+d(b)}$; con tale valore di s si ottiene

$$q(a,b) \le \frac{d(b)}{d(a)+d(b)} \tag{3.10}$$

per a e b arbitrari non adiacenti.

4. allontanamento dal nodo di partenza

In una rete, la distanza naturale tra due nodi è il minimo numero di tratti posti tra nodi adiacenti che si devono "percorrere" per andare dal primo dei due nodi al secondo; denoterò con $d(x, y)$ la distanza tra x e y.

I nodi che hanno distanza r dal nodo fissato o formano il *guscio* di centro o e raggio r.

Interessiamoci alla probabilità che la passeggiata riesca ad allontanarsi di una distanza di almeno m senza prima essere tornata nel nodo di partenza o; nel linguaggio del capitolo precedente, è la probabilità di escursione $q(o, S_m)$ da o al guscio S_m di centro o e raggio m, probabilità che troverò comodo a volte abbreviare in $q_m(o)$.

Essa si può determinare trovando la soluzione $u = u_{o,S_m}$ del problema (1.1) per $G = S_m$, e calcolando poi $q_m(o) = \sum_y \mathrm{P}(o, y)\,u(y)$.

† rende minimo il polinomio $Q(s) = d(a)s^2 + d(b)(1 - s)^2$

Il capitolo 3 insegna a maggiorare $q_m(o)$ per confronto con l'energia di opportune funzioni campione f; data la simmetria "sferica" del guscio, pare naturale cercare tra le funzioni *radiali*, che dipendono solo dalla distanza dal "centro" o.

Un attimo di riflessione mostra intanto che a un nodo di S_k sono adiacenti solo nodi di S_k, di S_{k+1} oppure (se $k > 0$) nodi di S_{k-1}; nel calcolo dell'energia di una funzione radiale gioca un ruolo solo il numero a_k di tratti che collegano un nodo di S_k con uno di S_{k-1}, per i vari valori di k.

Ai numeri a_1, a_2, ... darò il nome di *fattori di viabilità radiale* (attorno al centro o).

Si noti che a_1 coincide ovviamente con il grado $d(o)$.

Tra le funzioni radiali nulle in o che valgono 1 nel guscio S_m (supposto ovviamente non vuoto) la più ovvia è la funzione $f(x) = d(o,x)/m$; se ne trova immediatamente l'energia $\mathcal{E}(f) = (a_1 + \cdots + a_m)/m^2$ e se ne deduce la maggiorazione

$$q_m(o) = q(o, S_m) \leq \frac{a_1 + \cdots + a_m}{a_1\, m^2} \tag{4.1}$$

Al lettore propongo alcuni facili esempi, sui quali tornerò più avanti.

(4.2) Esempio (la scaletta). I nodi sono le coppie (x, y) di interi positivi con $x + y \leq 3$, due nodi sono adiacenti quando hanno uguale una coordinata e l'altra differisce di un'unità.

Prendiamo $o = (0,0)$; il guscio $S_3 = S_3(o)$ di centro o e raggio 3 è l'insieme dei quattro nodi $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(3,0)$.

I fattori di viabilità radiale sono $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$.

Da (4.1) si ottiene la stima $q_3(o) = q(o, S_3) \leq 2/3 = .6666\ldots$; il valore vero non è difficile da calcolare e ammonta a $q_3(o) = 7/13 = .5385\ldots$ ♢

(4.3) Esempio (il cubo). I nodi sono i vertici del cubo ordinario della geometria elementare; sono adiacenti quelli connessi da uno spigolo.

Fissiamo un nodo o; il guscio $S_3 = S_3(o)$ di centro o e raggio 3 è formato da un solo nodo o', quello "opposto" al nodo o.

I fattori di viabilità radiale sono $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 3$ e ogni vertice ha grado 3.

Dalla (3.10) si ricava la maggiorazione $q_3(o) = q(o, o') \leq 1/2$; dalla (4.1) si ha la stima (migliore) $q(o, o') \leq 4/9 = .4444\ldots$ Il valore esatto è in realtà $q(o, o') = 2/5 = .4$ ♢

(4.4) Esempio (il vespaio). I nodi sono le coppie (x, y) di interi *relativi* con $|x| + |y| \leq 3$, due nodi sono adiacenti quando hanno uguale una coordinata e l'altra differisce di un'unità.

Prendiamo $o = (0,0)$; il guscio $S_3 = S_3(o)$ di centro o e raggio 3 è costituito dai (dodici) nodi (x, y) che soddisfano la relazione $|x| + |y| = 3$.

I fattori di viabilità radiale sono $a_1 = 4$, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$.

Dalla (4.1) si trae la maggiorazione $q_3(o) \leq 36/36 = 1$ (decisamente deludente); il valore esatto è $q_3(o) = 7/11 = .6364\ldots$ $\diamondsuit$

Sull'onda della delusione patita nell'ultimo esempio, ci chiediamo se la scelta della funzione radiale $f(x) = d(o,x)/m$ sia stata felice e se si possa fare di meglio.

L'energia di una funzione radiale è la combinazione lineare, con i fattori di viabilità radiale, dei quadrati degli incrementi della funzione tra un guscio e il "successivo".

Per $f = d(o,x)/m$, tali incrementi valgono tutti $1/m$; sembra però preferibile una funzione i cui incrementi siano piccoli quando il fattore è grande.

A naso, pare ragionevole prendere come incremento il reciproco del fattore; in altre parole, adottare la funzione radiale

$$g(x) = \frac{1}{C} \sum_{1 \leq k \leq d(x)} \frac{1}{a_k} \qquad \text{con } C = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_m} \tag{4.5}$$

avente energia

$$\mathcal{E}(g) = \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_m} \right)^{-1} \tag{4.6}$$

e dedurne la maggiorazione

$$q_m(o) = q(o, S_m) \leq a_1^{-1} \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_m} \right)^{-1} \tag{4.7}$$

Mettiamo alla prova questa nuova stima, applicandola agli esempi precedenti; troviamo: per la scaletta, $q_3(o) \leq 6/11 = .5455\ldots$; per il vespaio, $q_3(o) \leq 15/23 = .6522\ldots$; per il cubo, addirittura il valore esatto $2/5$.

Le cose vanno decisamente meglio.

Al lettore lascio verificare che il naso ci ha guidato bene, svolgendo il seguente

(4.8) Esercizio. *Tra le funzioni radiali nulle in o che valgono* 1 *in S_m, la funzione* (4.5) *ha energia minima. Pertanto la* (4.7) *fornisce la stima radiale ottima.*

SUGGERIMENTO:

$$\sum_k a_k \left(1/a_k + y_k\right)^2 - \sum_k 1/a_k = \sum a_k y_k^2 + 2 \sum_k y_k = \sum_k a_k y_k^2$$

$\diamondsuit$

5. reti infinite

Finora abbiamo considerato solo reti finite; a partire da ora revocheremo tale restrizione.

In una rete infinita, esistono nodi a distanza arbitraria da un nodo o dato; la *bolla*† $B_n(o)$ (insieme dei nodi la cui distanza da o non supera l'intero positivo fissato n) contiene infatti un numero *finito* di nodi.

Ci si convince subito che, in una rete infinita, una passeggiata si allontana dal nodo di partenza di una distanza arbitriamente grande (con probabilità 1, ossia – come dicono i matematici – "quasi certamente", abbreviato in qc).

Il ragionamento è semplice: partendo dal nodo o, ai fini della probabilità di visitare il guscio $S_n(o)$ non hanno alcun rilievo i collegamenti ("radiali esterni") tra nodi di $S_n(o)$ e nodi di $S_{n+1}(o)$, tantomeno quelli tra nodi che distano da o più di n. *Tamquam non essent !*

Per valutare tale probabilità è dunque lecito sopprimere tutti i nodi fuori dalla bolla $B_n(o)$ e i loro collegamenti, e ricondursi alla rete (finita) rimanente (che un attimo di riflessione conferma essere connessa); a questo punto, il Corollario (2.3) dirime la questione. $\diamondsuit$

Con lo stesso tipo di ragionamento ci si accorge che le maggiorazioni date da (3.9) e (3.10) continuano a valere anche se la rete è infinita.

In dettaglio, siano dati i nodi a, b; introduciamo la probabilità $q^{(N)}(a,b)$ che una passeggiata partita da a visiti b senza prima tornare in *a e comunque prima del tempo N*; per $N > d(a,b)$, tale probabilità coincide con l'analoga probabilità, calcolata però in rapporto alla rete finita "locale" che si ottiene cancellando tutto quel che cade fuori di $B_N(a)$.

Quest'ultima probabilità è maggiorata dalla probabilità di visitare b senza prima tornare in a ma senza altre restrizioni temporali, sempre relativa alla rete finita locale; essa è maggiorata a sua volta dal secondo membro della relazione (3.9) oppure della (3.10).

Per concludere, basta far tendere N all'infinito. $\diamondsuit$

Ma la domanda più interessante è un'altra: la passeggiata torna (prima o poi) al nodo si partenza ? Quanto vale la probabilità di *non* tornare mai al nodo di partenza o (*probabilità di fuga*), che è il limite $q(o)$ della successione (decrescente) $q_n(o) = q(o, S_n(o))$ ‡ ?

---

† con l'unico sostantivo *sfera*, la lingua italiana indica tanto la superficie sferica quanto il solido racchiuso; a scanso di confusione, ho usato *guscio* per la "superficie" e *bolla* per il "solido"

‡ ho detto poco fa che ogni guscio è visitato qc, ossia è 1 la probabilità di visitare $S_n(o)$ *senza restrizioni di priorità*; qui però $q_n(o)$ è la probabilità di visitare il guscio $S_n(o)$ *senza prima tornare in o* !

6. reti ricorrenti e reti transitorie

Torniamo alla probabilità di fuga dal nodo o; se essa è nulla, una passeggiata che parte da o vi ritorna quasi certamente, e il nodo si chiama perciò *ricorrente*. Altrimenti, il nodo è detto *transitorio*.

In una rete finita, da ogni nodo la passeggiata visita tutta la rete e torna in particolare nel nodo di partenza, sicché la domanda non si pone[†].

Supponiamo dunque senz'altro che la rete sia infinita.

Il seguente fatto è familiare ai lettori di [CMCM](pag. 6); qui ne darò una dimostrazione autonoma.

(6.1) Teorema. *I nodi sono tutti ricorrenti oppure tutti transitori.*

Dim. Sia o' un nodo adiacente al nodo ricorrente o. Dalla disuguaglianza triangolare delle distanze scendono le seguenti inclusioni tra le bolle di centro o e di centro o':

$$B_{n-1}(o) \subset B_n(o') \subset B_{n+1}(o) \qquad (n > 0)$$

da cui segue

$$q(o, S_n(o')) \le q(o, S_{n+1}(o)) \tag{6.2}$$

Scriviamo $G = S_n(o')$ per abbreviare; con la notazione del capitolo 1, sia $u_{o,G}(x)$ la probabilità che una passeggiata partita dal nodo x visiti l'insieme G senza prima aver visitato il nodo o. Si ha

$$1 - u_{o,G}(o') \ge \mathrm{P}(o', o) = \frac{1}{d(o')} \tag{6.3}$$

Per calcolare $q(o', G) = q(o', S_n(o'))$, possiamo cancellare tutto quanto cade fuori della bolla $B_n(o')$ e ragionare sulla rimanente rete locale finita.

Posto $\alpha = 1 - u_{o,G}(o')$, la funzione

$$f = \frac{u_{o,G} - u_{o,G}(o')}{1 - u_{o,G}(o')} = \frac{1}{\alpha} u_{o,G} - \frac{1}{\alpha} u_{o,G}(o')$$

è ben definita, e per costruzione si annulla in o' e vale 1 in G.

Dal principio di Kelvin (3.6) e dalla (3.7) si deduce quindi, tenendo anche conto della (6.3)

$$d(o')\, q(o', S_n(o')) = d(o')\, q(o', G) \le \mathcal{E}(f) = \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{E}(u_{o,G}) \le d(o')^2\, d(o)\, q(o, G)$$

[†] il ragionamento fa implicito ricorso in verità alla forma forte dell'assenza di memoria, vedi [CMCM], pag. 21

D'altra parte $q(o, G) \leq q(o, S_{n+1}(o))$ per la (6.2); si ha così

$$q(o', S_n(o')) \leq d(o)\, d(o')\; q(o, S_{n+1}(o))$$

Dato che o è ricorrente, $q(o, S_{n+1}(o))$ tende a zero per $n \to \infty$, e dunque anche $q(o', S_n(o'))$ tende a zero .

In altre parole, anche il nodo o' è ricorrente. Di nodo in nodo adiacente, dal momento che la rete è connessa, tutti i nodi sono ricorrenti. $\diamondsuit$

Alla luce di questo teorema, conviene trasferire alla rete gli aggettivi *ricorrente* e *transitorio/a*, e così faremo.

È un fatto notevole che, quasi certamente, tutti i nodi di una rete ricorrente sono visitati dalla passeggiata.

Dati infatti due nodi a e b, la probabilità di visitare b partendo da a deve essere 1, ché altrimenti si aprirebbe la possibilità di partire da b, visitare a e non tornare mai più in b, che contrasta con il fatto che b è ricorrente.

Si potrebbe poi dimostrare che in una rete ricorrente ogni nodo è visitato (qc) infinite volte, mentre in una transitoria ogni nodo riceve un numero qc finito di visite, e la distanza dal nodo di partenza tende qc all'infinito.

Non voglio qui appesantire la discussione, e perciò rimando a [CMCM] il lettore interessato.

Il seguente è forse l'esempio più semplice di rete ricorrente.

(6.4) Esempio (la linea unidimensionale). I nodi sono gli interi relativi, sono adiacenti quelli consecutivi. Preso $o = 0$, il guscio $S_n(o)$ è l'insieme $\{-n, +n\}$; la probabilità $u(x)$, partendo da x, di visitare $S_n(o)$ senza prima avere visitato o si trova come nell'esempio (1.2), e risulta $u(x) = |\,x\,|/n$; ne segue $q_n(o) = q(o, S_n(o)) = 1/n$, che tende a zero per $n \to \infty$.

La probabilità di fuga da o si annulla e la rete è ricorrente. $\diamondsuit$

7. condizioni sufficienti per una rete ricorrente

Come abbiamo visto, per provare che una rete è ricorrente si deve mostrare che si annulla la probabilità di fuga da un nodo o; si cercherà dunque di maggiorare convenientemente la probabilità $q(o, S_n(o))$ di escursione da o nel guscio di raggio n e centro o.

Allo scopo, sembra naturale usare le stime radiali del capitolo 4.

Vediamo un esempio.

(7.1) Esempio (la griglia bidimensionale). I nodi sono le coppie (x, y) di interi relativi, due nodi sono adiacenti quando hanno uguale una coordinata e l'altra differisce di un'unità (cfr. esempio 4.4).

Il guscio $S_n = S_n(o)$ di centro $o = (0,0)$ e raggio n è l'insieme delle coppie (x,y) con $|x| + |y| = n$; un calcolo elementare mostra che i fattori di viabilità radiale attorno a o sono dati da $a_n = 8n - 4 = 4(2n-1)$.

La (4.7) fornisce la maggiorazione

$$q_n(o) = q_n(o, S_n(o)) \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}} \leq \frac{2}{\sum_{k=1}^{n} 1/k}$$

che tende a zero per $n \to \infty$, dal momento che la somma $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ tende all'infinito.

La probabilità di fuga da o si annulla, la griglia bidimensionale è una rete ricorrente. $\diamondsuit$

Il ragionamento svolto sopra funziona sempre, purché i fattori di viabilità radiale attorno a un nodo siano "contenuti", in modo tale che la somma dei loro reciproci diventi infinita (*viabilità radiale moderata*). Si tratta di una condizione relativamente comoda da verificare in molte situazioni concrete.

La viabilità radiale moderata, benché sufficiente per la ricorrenza della rete, non è affatto necessaria: esistono reti ricorrenti che si diramano da un vertice con fattori di viabilità radiale dati da $a_n = 2^n$, i cui reciproci hanno dunque platealmente somma finita[†].

I discorsi di viabilità fanno sorgere una domanda: cosa accade quando si "sfronda" una rete ricorrente, cancellando taluni collegamenti tra i nodi (ma in modo da salvaguardare la connessità della rete) ?

Da un lato la minore percorribilità della rete rende meno agevole allontanarsi dal nodo di partenza, e dunque più facile tornarvi; d'altro canto, tutti i percorsi sono a doppio senso e perciò anche il ritorno al nodo di partenza parrebbe ostacolato dai tagli operati nei collegamenti.

Si tratta di sapere quale tra i due effetti finisce per prevalere.

Per quanto ne so, la questione fu posta per la prima volta, parecchi decenni fa, dal grande probabilista William Feller, proprio a proposito della griglia dell'esempio (7.1).

Vi si risponde senza troppa difficoltà, affermando che

(7.2) PROPOSIZIONE. *Sfrondando una rete ricorrente se ne ottiene una pure ricorrente.*

DIM. Indichiamo con una tilde gli oggetti relativi alla rete sfrondata e sia o un nodo fissato (la cui menzione nelle formule sarà soppressa per brevità).

Provare che o è ricorrente nella rete sfrondata significa dimostrare che si annulla la probabilità $\tilde{q} = \tilde{q}(o)$ di fuga da o, la quale è il limite monotono

[†] cfr. W.WOESS: *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge, 2000, Ex. 6.16 a pag. 65

(quindi l'estremo inferiore) delle probabilità $\tilde{q}(o, \tilde{S}_n)$ di escursione da o nel guscio (di centro o e) raggio n.

Il problema è complicato dal fatto che la cancellazione di taluni collegamenti altera le distanze e distorce di conseguenza i gusci; ragione per cui $\tilde{S}_n$ non coincide con S_n. Occorre un minimo di cautela.

Per ogni n, la bolla B_n è un insieme finito; esiste dunque un intero k_n per il quale B_n è incluso in $\tilde{B}_{k_n}$

Per raggiungere il guscio $\tilde{S}_{k_n}$ partendo da o è dunque necessario aver visitato S_n; ne segue pertanto

$$\tilde{q}(o, \tilde{S}_{k_n}) \leq \tilde{q}(o, S_n)$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}(o) = \inf_j \tilde{q}(o, \tilde{S}_j) \leq \tilde{q}(o, \tilde{S}_{k_n}) \leq \tilde{q}(o, S_n) \tag{7.3}$$

Dal principio di Kelvin (3.6) e dalla (3.7) sappiamo che il prodotto $d(o)\, q(o, S_n)$ è il minimo delle energie delle funzioni nulle in o che valgono 1 in S_n; ma sfrondare una rete non aumenta la funzione di adiacenza né di conseguenza l'energia delle funzioni, per cui avremo

$$\tilde{d}(o)\, \tilde{q}(o, S_n) \leq d(o)\, q(o, S_n)$$

Dalla (7.3) otteniamo allora

$$\tilde{q} = \tilde{q}(o) \leq \frac{1}{\tilde{d}(o)}\, \tilde{d}(o)\, \tilde{q}(o, S_n) \leq \frac{d(o)}{\tilde{d}(o)}\, q(o, S_n)$$

e l'ultimo termine tende a zero per $n \to \infty$, essendo la rete iniziale ricorrente per ipotesi. $\diamondsuit$

Si dimostra anche che la ricorrenza di una rete si conserva anche se si "pota" la rete, vale a dire se ne sopprimono alcuni nodi insieme ai loro collegamenti. Ma basta: è tempo di pensare alle reti transitorie.

Saremo costretti a rovesciare la nostra strategia: per dimostrare che una rete è transitoria, ossia che la probabilità di fuga da un nodo non si annulla, dovremo sforzarci di *minorare* (e non più di maggiorare) le probabilità di escursione nei gusci.

In determinate circostanze, per la verità, le stime radiali del capitolo 4 si rivelano esatte e permettono di calcolare la probabilità di fuga.

Ne fa fede l'esempio seguente (che costituisce un caso classico di rete transitoria).

(7.4) Esempio (l'albero omogeneo di grado tre). La rete si descrive bene a partire da un suo nodo o.

Al nodo “capostipite” o sono direttamente collegati tre nodi “discendenti diretti”, che formano il guscio di centro o e raggio 1; ciascuno di questi tre è collegato (oltre che al capostipite) a due discendenti, i sei discendenti sono tutti distinti e formano il guscio di (centro o e) raggio 2.

Nello stesso modo si ottengono i dodici nodi dal guscio di raggio 3, e via di questo passo.

La scelta del nodo di partenza non ha alcuna importanza, perché la rete è omogenea: osservatori posti in nodi diversi vedono attorno a sé la stessa identica struttura di nodi e di collegamenti.

I fattori di viabilità radiale sono $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, e la (4.7) fornisce la maggiorazione

$$q_n(o) = q(o, S_n(o)) \leq a_1^{-1} \Big(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\Big)^{-1} = \big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\big)^{-1} \quad (7.5)$$

La bella sorpresa è che questa disuguaglianza *è in realtà una uguaglianza*.

Il ragionamento è semplice.

Il prodotto $d(o)\, q(o, S_n(o))$ è l'energia della funzione $u = u_{o,S_n(o)}$ (la probabilità di visitare il guscio $S_n(o)$ senza prima visitato o, come funzione del nodo di partenza), e quest'energia è la minima tra quelle delle funzioni nulle in o che valgono 1 nel guscio (principio di Kelvin).

Grazie alla struttura omogenea della rete, è intuitivo arguire che u è una funzione *radiale* (cioè $u(x)$ dipende solo dalla distanza di x da o); tanto vale cercare l'energia minima tra quelle delle *funzioni radiali* che sono nulle in o e valgono 1 nel guscio.

L'esercizio (4.8) assicura che questo minimo è dato dalla (4.6), cioè che la (7.5) è una uguaglianza. Al limite per $n \to \infty$, si trova che la probabilità di fuga è $1/2$: la rete è transitoria. ♢

Tranne situazioni particolari come questa, in generale c'è bisogno di minorare le probabilità di escursione, e le minorazioni non fanno ancora parte del nostro arsenale. Per procurarci le tecniche adeguate, apriremo una parentesi nel prossimo capitolo.

8. correnti e flussi

Nel corso di questo capitolo, destinato come ho detto a fabbricare minorazioni valide per le probabilità di escursione, torniamo a considerare reti finite.

L'idea di fondo consiste nel trasferire l'attenzione dai singoli nodi ai “lati”, cioè alle coppie di nodi adiacenti, e immaginare che in ognuno di questi lati scorra una “corrente” †.

† idee del genere richiamano analogie fisiche relative ai circuiti elettrici, analogie che come sempre ignoreremo

In quest'ambito di idee, una *corrente* è una funzione $j(x,y)$ antisimmetrica nei suoi argomenti (cioè $j(x,y) = -j(y,x)$), che si annulla se x e y non sono adiacenti.

A partire da una funzione di nodo f la scrittura

$$j(x,y) = A(x,y)\bigl(f(x) - f(y)\bigr) \tag{8.1}$$

definisce chiaramente una corrente, detta *gradiente* di f e si usa abbreviare la relazione (8.1) nella forma concisa $j = \nabla f$.

Il numero positivo

$$\mathcal{W}(j) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} A(x,y)\, j(x,y)^2 \tag{8.2}$$

viene detto energia della corrente j (per come abbiamo definito le correnti, il fattore $A(x,y)$ sarebbe superfluo).

L'energia del gradiente di una funzione coincide con l'energia della funzione; in simboli:

$$\mathcal{W}(\nabla f) = \mathcal{E}(f) \tag{8.3}$$

Data una corrente j, si introduce poi la funzione ∂j definita da

$$\partial j(x) = \sum_y j(x,y) \tag{8.4}$$

che esprime la somma algebrica delle correnti "uscenti" dal nodo x.

Lo strumento fondamentale è contenuto nel lemma seguente.

(8.5) Lemma. *Sussiste la disuguaglianza*

$$\left(\sum_x f(x)\,\partial j(x)\right)^2 \le \mathcal{E}(f)\,\mathcal{W}(j)$$

Dim. Poiché la disuguaglianza è banalmente vera quando $\mathcal{W}(j) = 0$ (ché allora j si annulla), supponiamo senz'altro $\mathcal{W}(j) > 0$. Servono abbreviazioni: scriviamo

$$\alpha = \mathcal{W}(j) \qquad\qquad \beta = \sum_x f(x)\,\partial j(x) \tag{8.6}$$

Calcolando l'energia della corrente $(\beta j - \alpha\,\nabla f)$ secondo la definizione (8.2), si trova

$$0 \le \mathcal{W}(\beta j - \alpha\,\nabla f) = \beta^2\,\mathcal{W}(j) + \alpha^2\,\mathcal{W}(\nabla f) - \alpha\beta \sum_{x,y} A(x,y)\bigl(f(x) - f(y)\bigr)\, j(x,y) \tag{8.7}$$

Tenendo conto dell'antisimmetria di j, l'ultima somma che appare nella (8.7) si scrive

$$\sum_{x,y} A(x,y)f(x)j(x,y) + \sum_{x,y} A(x,y)f(y)j(y,x) = 2 \sum_{x,y} A(x,y)f(x)j(x,y) =$$

$$= 2 \sum_x f(x) \sum_y A(x,y)\, j(x,y) = 2 \sum_x f(x) \sum_y j(x,y) =$$

$$= 2 \sum_x f(x)\, \partial j(x) = 2\beta$$

Sostituendo nella (8.7) e usando la (8.3) e le definizioni (8.6)

$$0 \le \mathcal{W}(j)^2\, \mathcal{E}(f) - \mathcal{W}(j)\, \beta^2$$

da cui dividendo per il fattore non nullo $\mathcal{W}(j)$

$$0 \le \mathcal{E}(f)\, \mathcal{W}(j) - \left(\sum_x f(x)\, \partial j(x) \right)^2$$

Il lemma è dimostrato. $\diamondsuit$

Avviciniamoci al problema che ci interessa: siano dati un nodo o e un insieme G di nodi che non contiene o.

Per studiare la probabilità $q(o,G)$ di escursione da o in G servono correnti "organizzate", che "si dirigano" da o verso G "senza dispersione".

In altre parole, correnti j per le quali la funzione ∂j (somma algebrica delle correnti uscenti) si annulli in tutti i nodi distinti da o e non appartenenti a G; una tal corrente sarà detta un *flusso* (da o verso G); il numero $\partial j(o)$ sarà la *portata* del flusso. Un flusso di portata 1 si dirà *unitario*.

Stabilita questa terminologia, si dimostra il seguente teorema, per certi versi "duale" del principio di Kelvin, che offre minorazioni per la probabilità di escursione.

(8.8) TEOREMA. *Se j è un flusso unitario da o a G, per la probabilità $q(o,G)$ di escursione da o in G si ha*

$$q(o,G) \ge \frac{1}{d(o)\, \mathcal{W}(j)}$$

DIM. Sia $u = u_{o,G}$ la probabilità di visitare G senza aver prima visitato o, come funzione del nodo di partenza.

La funzione $f = 1 - u$ ha la stessa energia di u, cioè $d(o)\, q(o,G)$ (in virtù della 3.7); in G la funzione f si annulla, mentre per ipotesi si annulla ∂j in tutti i nodi distinti da o e non appartenenti a G; nel nodo o tanto f che ∂j valgono 1.

Pertanto $\sum_x f(x)\, \partial j(x) = 1$ e il lemma (8.5) fornisce

$$1 \le d(o)\, q(o, G)\, \mathcal{W}(j)$$

La prova del teorema è conclusa. $\diamondsuit$

Applichiamo la disuguaglianza ottenuta; nell'esempio (4.2) della scaletta, introduciamo il flusso caratterizzato concisamente da

$$j\big((x,y),(x+1,y)\big) = j\big((x,y),(x,y+1)\big) = \frac{1}{2} 2^{-x \vee y} \tag{8.9}$$

Aiutandosi con un disegno, il lettore riconoscerà che j è un flusso unitario da $o = (0,0)$ verso $S_3(o) = \{(x,y) : x + y = 3\}$, e ne calcolerà facilmente l'energia $\mathcal{W}(j) = 15/16$.

Poiché $d(o) = 2$, dal teorema (8.8) deriva per $q = q_3(o) = q(o, S_3)$ la disuguaglianza $q \ge 8/15 = .5333\ldots$

Si impone il raffronto con la stima $q \le 6/11 = .5455\ldots$ (radiale ottima) di pag. 10, e con il valore esatto $q = 7/13 = .5385\ldots$

(8.10) Esercizio. Verificare che il flusso (8.9) *non* è gradiente di alcuna funzione.

cenno di soluzione. Abbreviamo (x, y) in xy; le relazioni

$$j(00, 10)+j(10, 11)+j(11, 12) = f(12)-f(00) = j(00, 01)+j(01, 02)+j(02, 12)$$

conducono all'assurdo $1 = 1/2 + 1/4 + 1/4 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$. $\diamondsuit$

9. condizioni sufficienti per una rete transitoria

Torniamo a considerare reti infinite, introducendo l'idea di un flusso unitario "illimitato" uscente dal nodo o, che si definisce esattamente come nel caso finito, imponendo la sola condizione che la funzione ∂j valga 1 nel nodo o e si annulli *in tutti gli altri nodi*.

L'energia del flusso si definisce ancora tramite la (8.2), ma ora essa può benissimo risultare *infinita*.

Una condizione sufficiente di transitorietà della rete è data nel teorema seguente. A dire il vero, la condizione si rivela anche *necessaria* †, ma qui ci basterà la sufficienza.

† cfr. N. Pintacuda: *Catene di Markov*, ETS, Pisa, 2000, pag. 162

(9.1) Teorema (criterio di Royden). *Se esiste un flusso unitario uscente da un nodo e avente energia finita, allora la rete è transitoria.*

Dim. Il flusso j esca dal nodo o e abbia energia W; fissato n, la scrittura

$$j_n(x,y) = j(x,y) \ \text{ se } x,y \in B_n(o) \qquad j_n(x,y) = 0 \text{ altrimenti}$$

definisce un flusso unitario da o verso $S_n(o)$, relativo alla rete ristretta alla bolla $B_n(o)$ (rete locale finita).

Poiché banalmente si ha $\mathcal{W}(j_n) \leq \mathcal{W}(j) = W$, il teorema (8.8) comporta

$$q_n(o) = q_n(o, S_n) \geq \frac{1}{d(o)\,\mathcal{W}(j_n)} \geq \frac{1}{d(o)\,W}$$

e prendendo il limite per $n \to \infty$ si vede che la probabilità di fuga da o non si annulla. La rete è transitoria. $\diamondsuit$

Un esempio arcinoto di applicazione del criterio è il seguente.

(9.2) Esempio (l'ottante). I nodi sono le terne ordinate $x = (x_1, x_2, x_3)$ di numeri interi positivi; due nodi sono adiacenti quando hanno uguali due coordinate e l'altra differisce di un'unità.

Fabbricheremo un flusso unitario uscente da $o = (0,0,0)$ avente energia finita, stabilendo così che la rete è transitoria.

Abbreviamo con $|x|$ la distanza di x da o, vale a dire poniamo

$$|x| = d(o,x) = \sum_{j=1}^{3} |x_j|$$

e notiamo che $\big||x| - |y|\big| = 1$ quando x e y sono adiacenti.

Grazie all'antisimmetria, per individuare un flusso j basta, per ogni x, definire $j(x,y)$ per i nodi y adiacenti a x per i quali $|y| > |x|$, cioè per i seguenti:

$$x' = (x_1+1, x_2, x_3) \quad x'' = (x_1, x_2+1, x_3) \quad x''' = (x_1, x_2, x_3+1)$$

Introdotta la funzione $s(t) = (t+1)(t+2)(t+3)$, poniamo allora

$$j(x,x') = \frac{2(x_1+1)}{s(|x|)} \quad j(x,x'') = \frac{2(x_2+1)}{s(|x|)} \quad j(x,x''') = \frac{2(x_3+1)}{s(|x|)}$$

e controlliamo che la condizione $\sum_y j(x,y) = 0$ sia soddisfatta per ogni $x \neq o$.

Il calcolo, sebbene noioso, è elementare; si trova

$$\sum_y j(x,y) = \sum_{y:|y|>|x|} j(x,y) - \sum_{y:|y|<|x|} j(x,y) =$$

$$= \frac{2(x_1+x_2+x_3+3)}{s(|x|)} - \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{s(|x|-1)} = \frac{2(|x|)}{s(|x|)} - \frac{2|x|}{s(|x|-1)}$$

effettivamente uguale a zero per effetto dell'identità $t\,s(t) = (t+3)\,s(t-1)$ che discende dalla definizione della funzione $s(t)$.

Immediato verificare che il flusso è unitario. Resta da valutarne l'energia

$$\mathcal{W}(j) = \sum_n \sum_{x:|x|=n} \sum_{y:|y|=n+1} j(x,y)^2 \le 3 \sum_n \sum_{x:|x|=n} j(x,y)^2$$

Quando $|x| = n$, il flusso $j(x,y)$ è maggiorato da $2(n+1))/s(n)$; il numero dei nodi x per i quali $|x| = n$ a sua volta è maggiorato da $(n+1)^2$. Pertanto

$$\mathcal{W}(j) \le 12 \sum_n \frac{(n+1)^4}{s(n)^2} \le 12 \sum_n \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$$

e possiamo concludere che la rete è transitoria. $\diamondsuit$

A titolo di esercizio, il lettore riconoscerà che neppure il flusso introdotto nell'esempio precedente è gradiente di una funzione: gli basterà confrontare i percorsi che, con abbreviazioni analoghe a quelle dell'esercizio (8.10), si indicano schematicamente l'uno nella forma $000 \to 100 \to 200 \to 210$ e l'altro $000 \to 010 \to 110 \to 210$.

10. la resistenza tra due nodi

Conclude l'esposizione questo capitolo, dedicato a una curiosa proprietà delle reti ricorrenti.

Prima di entrare in argomento, devo svelare al lettore un'importante verità: la relazione (3.8) di reciprocità, dimostrata a suo tempo per le reti finite, vale in generale, anche per una rete infinita. Non volendo interrompere il filo del discorso, ne rimando la dimostrazione all'appendice.

Data una coppia di nodi distinti a e b, il numero

$$\rho(a,b) = \frac{1}{d(a)\,q(a,b)}$$

misura la "difficoltà", partendo dal nodo a, di compiere un'escursione in b prima di tornare al nodo di partenza.

Merita dunque il nome † di *resistenza* tra i nodi a e b; il fattore $d(a)$ e la reciprocità garantiscono la simmetria $\rho(a,b) = \rho(b,a)$.

† motivato peraltro dalle solite considerazioni elettriche

Il fatto notevole è il seguente: in una rete ricorrente (finita o infinita), sussiste per le resistenze la disuguaglianza triangolare $\rho(a,b) \le \rho(a,c)+\rho(b,c)$.

La resistenza ha dunque tutte le proprietà di una distanza (se tra nodi uguali la definiamo nulla per convenzione).

(10.1) Teorema. *In una rete ricorrente, la resistenza è una distanza.*

Dim. Presi tre nodi distinti a, b e c, sia $u_{b,a}(x)$ la probabilità di visitare a senza prima aver visitato b (partendo da x), e analogamente $u_{a,b}(x)$ quella di visitare b senza prima aver visitato a (sempre partendo da x).

Posto $h_a = u_{b,a}(c)$ e $h_b = u_{a,b}(c)$, l'ipotesi di ricorrenza della rete assicura che $h_a + h_b = 1$. Ne segue

$$\Big(h_a - \frac{q(c,a)}{q(c,a)+q(c,b)}\Big) + \Big(h_b - \frac{q(c,b)}{q(c,a)+q(c,b)}\Big) = 0 \qquad (10.2)$$

Pertanto almeno una delle parentesi dev'essere non negativa; per fissare le idee, supponiamo lo sia la seconda.

Uno dei modi, partendo da a, per visitare b senza prima essere tornati in a è il seguente: visitare c senza prima tornare in a, e di lì visitare b prima di aver visitato a. Si ha allora†

$$q(a,b) \ge q(a,c)\, u_{a,b}(c) = q(a,c)\, h_b \ge q(a,c)\, \frac{q(c,b)}{q(c,a)+q(c,b)} \qquad (10.3)$$

Passando alle resistenze e tenendo conto della reciprocità

$$\rho(a,b) = \frac{1}{d(a)\, q(a,b)} \le \frac{q(c,a)}{d(a)\, q(a,c)\, q(c,b)} + \frac{1}{d(a)\, q(a,c)} =$$

$$= \frac{d(c)\, q(c,a)}{d(a)\, q(a,c)\, d(c)\, q(c,b)} + \frac{1}{d(a)\, q(a,c)} = \frac{1}{d(c)\, q(c,b)} + \rho(a,c) = \rho(a,c) + \rho(c,b)$$

Nel caso poi fosse positiva la prima parentesi della (10.2), basterebbe scambiare tra loro i nodi a e b e sfruttare la simmetria delle resistenze. ♢

La proprietà espressa dal teorema (10.1) ha utilità concreta ? Non ne ho la minima idea. Intanto precisiamone un aspetto.

(10.4) Proposizione. *In una rete ricorrente, la resistenza è maggiorata dalla distanza "naturale".*

Dim. Se a e b sono nodi adiacenti, la relazione $q(a,b) \ge \mathrm{P}(a,b)$ risulta ovvia; moltiplicando per $d(a)$ e passando al reciproco, ne consegue $\rho(a,b) \le 1$.

Per a e b arbitrari, procedendo per iterazione e sfruttando la disuguaglianza triangolare, si trova $\rho(a,b) \le d(a,b)$. ♢

---

† vedi nota a pag. 10

Ne discende, per le probabilità di escursione in una rete ricorrente, la minorazione

$$q(a, b) \geq \frac{1}{d(a)\, d(a, b)} \tag{10.5}$$

di non grande qualità, a dire il vero, come si constata provando ad applicarla a qualche esempio di rete finita.

La proposizione (10.4) non deve oscurare il fatto che in una rete ricorrente infinita le resistenze tra nodi molto lontani sono grandi.

Detto in modo preciso, sia o un nodo di una rete ricorrente infinita, e siano $x_1, x_2, \ldots$ nodi tali che le distanze $d(o, x_n)$ tendano all'infinito; le resistenze $\rho(o, x_n)$, pur restando maggiorate da $d(o, x_n)$, tendono allora all'infinito.

Per provarlo, si osservi che per visitare x_n partendo da o occorre un tempo non inferiore a $d(o, x_n)$; la probabilità di escursione $q(o, x_n)$ è dunque maggiorata dalla probabilità che il tempo S di ritorno in o sia maggiore di $d(o, x_n)$; quest'ultima tende a zero, poiché S è qc finito (essendo la rete ricorrente) e $d(o, x_n)$ tende all'infinito per ipotesi.

Ne consegue $\rho(o, x_n) \to \infty$.

Va osservato che la disuguaglianza triangolare cade generalmente in difetto nelle reti transitorie.

Al lettore propongo il seguente (impegnativo) esercizio.

(10.7) Esercizio. Si consideri l'albero omogeneo di grado tre, descritto nell'esempio (7.4). Verificare tra nodi adiacenti la resistenza è 1, mentre tra due nodi a distanza naturale 2 vi è resistenza 5/2, così che la disuguaglianza triangolare risulta violata.

suggerimento. In base a (7.4), la probabilità di tornare nel nodo di partenza è 1/2; per simmetria, è pure 1/2 la probabilità di visitare un nodo partendo da uno adiacente; siano a, b e c i tre nodi adiacenti a un nodo dato o.

Calcoliamo la probabilità u, partendo da o, di visitare c senza aver prima visitato a; partendo da o, con probabilità 1/3 si visita c immediatamente, con probabilità 1/3 si va in b, da dove con probabilità 1/2 si torna al punto di partenza o; ne segue l'equazione $u = 1/3 + 1/6\, u$, da cui $u = 2/5$.

Finalmente $q(a, c) = \mathrm{P}(a, o)\, u = (1/3)(2/5) = 2/15$ e $\rho(a, c) = 5/2$. ◇

Si dimostra facilmente che, se il nodo c è un "passaggio obbligato" tra i nodi a e b, nel senso che tutti i percorsi che collegano a con b passano necessariamente per c, allora sussiste l'*uguaglianza* $\rho(a, b) = \rho(a, c) + \rho(c, b)$.

Ma sorvoliamo: quest'esposizione è già fin troppo lunga.

11. appendice: la reciprocità

Consideriamo una passeggiata che parte dal nodo a; ne siano S il tempo (aleatorio) di ritorno in a (non necessariamente finito) e T il tempo (pure aleatorio) della prima visita in b.

Utilizziamo una convenzione inconsueta: un tratto verticale sul segno $\sum$ sottointende che la somma è fatta su indici *distinti e diversi tanto da a che da b*.

Possiamo allora scrivere

$$d(a)\,q(a,b) = d(a)\ P(T<S) = \sum_{k\geq 1} d(a)\,P(k=T<S) =$$

$$= d(a)\,\mathrm{P}(a,b) + \sum_{k\geq 1}\ \overset{|}{\sum_{x_1,\ldots,x_k}} d(a)\,\mathrm{P}(a,x_1)\ldots\mathrm{P}(x_k,b) =$$

$$= A(a,b) + \sum_{k\geq 1}\ \overset{|}{\sum_{x_1,\ldots,x_k}} \frac{A(a,x_1)\ldots A(x_k,b)}{d(x_1)\ldots d(x_k)}$$

La funzione di adiacenza è simmetrica e il prodotto commutativo, per cui questa è esattamente l'espressione che si otterrebbe calcolando $d(b)\ q(b,a)$. $\diamondsuit$