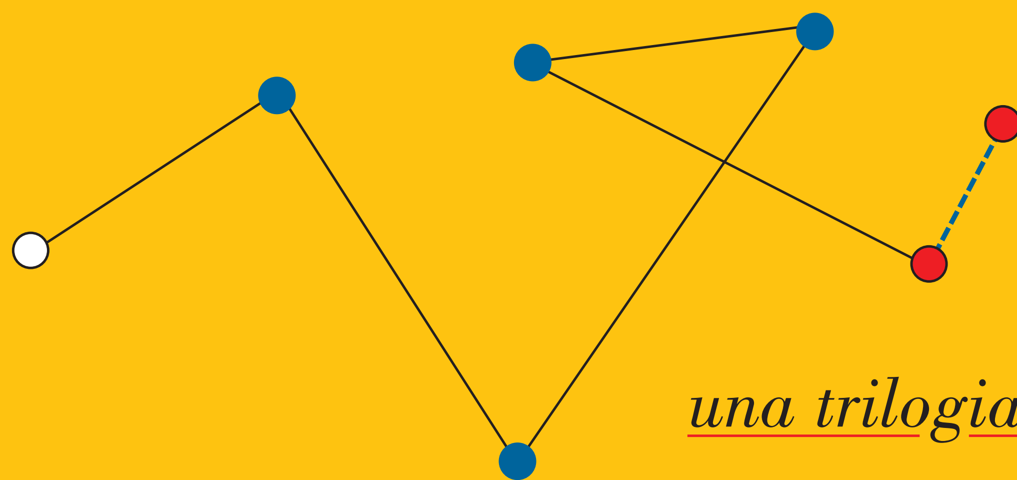
edizione elettronica

Nicolò Pintacuda

Invito alle Catene di Markov



una trilogia

Un corso minimo sulle catene di Markov

Passeggiata a caso in una rete

Variazioni su tema di Markov

Edizioni ETS

www.edizioniets.com

isbn: 978-884672367-3

un corso minimo sulle catene di markov

DI NICOLÒ PINTACUDA

1. le catene di markov

Immaginiamo di osservare a intervalli regolari di tempo un sistema dinamico soggetto all'influenza del caso.

Ammettiamo che, trovandosi il sistema in un certo stato a un dato istante, esso possa cambiare stato all'istante successivo e compiere una *transizione* aleatoria verso altri stati, con determinate probabilità. Supponiamo poi che queste probabilità di transizione non vengano in alcun modo influenzate dal *come* il sistema era pervenuto allo stato dal quale la transizione si compie.

È questa, in parole povere, l'idea di catena di Markov. Ma qui devo essere più preciso, e magari un pochino più formale.

Indicherò con $X_0, X_1 \dots X_n, \dots$ lo stato aleatorio del sistema negli istanti 0, 1, …, n, …; con un linguaggio più geometrico, sono le *posizioni* aleatorie che nei successivi istanti la catena occupa nello *spazio degli stati* (o delle *fasi*), costituito dagli stati possibili per il sistema (spazio che sarà tacitamente supposto *numerabile*).

La condizione di Markov si traduce nel postulare che, una volta conosciuta la posizione attuale, ogni informazione circa le posizioni precedenti risulti irrilevante per la distribuzione di probabilità della posizione successiva, vale a dire che la probabilità condizionata $P(X_{n+1} = y | X_n = x, A)$ non dipenda dalla scelta dell'evento A, purché questo sia "anteriore a n" (cioè funzione delle posizioni $X_0, X_1, \dots, X_n$). In definitiva, si traduce nel supporre

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, A) = P(X_{n+1} = y | X_n = x) \tag{1.1}$$

per ogni $n \geq 0$, ogni x e y nello spazio degli stati, e ogni evento A anteriore a n (converrà darsi un'abbreviazione, e indicare con $\mathcal{F}_n$ la classe degli eventi anteriori a n).

Il secondo membro della (1.1) dipende solo da x, da y e da n; quando esso non dipende da n, si parla di catena di Markov *omogenea*; nell'ambito di questo minicorso tratterò solo catene omogenee (per le quali del resto si hanno i risultati più interessanti), senza più specificarlo.

La relazione (1.1) si riscrive pertanto nella forma

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, A) = \mathrm{P}(x,y) \quad \text{per ogni } n, x, y \text{ e ogni } A \in \mathcal{F}_n \tag{1.2}$$

nella quale compaiono le *probabilità di transizione* $\mathrm{P}(x,y)$.

Spesso si preferisce riscrivere queste relazioni tra probabilità condizionate nella forma (praticamente equivalente) di prodotto, cioè

$$P(A, X_n = x, X_{n+1} = y) = P(A, X_n = x)\, \mathrm{P}(x,y)$$

il che evita di dover specificare la condizione $P(A, X_n = x) > 0$, necessaria per poter definire la probabilità condizionata.

Scrivendola reiteratamente per $n, n+1, \ldots, n+k-1$ se ne ricava

$$P(A, X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \ldots, X_{n+k} = x_k) =$$

$$= P(A, X_n = x_0)\, \mathrm{P}(x_0, x_1) \ldots \mathrm{P}(x_{k-1}, x_k) \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{F}_n \tag{1.3}$$

Prendendo per A l'evento totale e ponendo $n = 0$ si deduce in particolare

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = P(X_0 = x_0)\, \mathrm{P}(x_0, x_1) \ldots \mathrm{P}(x_{k-1}, x_k)$$

In questa relazione si legge che le proprietà probabilistiche della catena sono completamente determinate dalla distribuzione iniziale $P(X_0 = x_0)$ (la legge della variabile aleatoria X_0) e dalla *catena* di prodotti formati con le probabilità di transizione.

Un confronto con la (1.3) mette poi in evidenza una proprietà assai notevole: una volta che la catena si trovi nello stato x_0 al tempo n, e condizionalmente a un arbitrario evento passato, essa *si muove a decorrere da quell'istante come se partisse di bel nuovo da x_0 e nulla fosse prima accaduto*: una brillante manifestazione di "assenza di memoria", caratteristica delle catene di Markov.

2. probabilità di visita

Un primo problema classico è quello di determinare, per una catena che parte dallo stato x, la probabilità $u_F(x)$ che essa visiti (prima o poi) un dato insieme F di stati.

Se $x \in F$, la catena visita già F all'istante iniziale e dunque $u_F(x) = 1$.

Meno ovvie sono le cose per $x \notin F$; ma esaminando le transizioni possibili a partire da x e sfruttando l'assenza di memoria (all'istante 1), si stabilisce la relazione $u_F(x) = \sum_y \mathrm{P}(x,y)\, u_F(y)$, che si usa abbreviare in $u_F = \mathrm{P}u_F$, ed esprimere a parole dicendo che la funzione u_F è *armonica* (per $x \notin F$).

Brevemente: la probabilità u_F di visitare l'insieme F come funzione del punto di partenza

$$\text{vale 1 in } F \text{ ed è armonica fuori di } F \tag{2.1}$$

In certi casi, queste restrizioni bastano a determinare completamente la probabilità di visita, come nel seguente

(2.2) Esempio. La *passeggiata a caso semplice*.

Gli stati sono gli interi relativi (positivi e negativi) e le probabilità di transizione date da $\mathrm{P}(x, x+1) = \mathrm{P}(x, x-1) = 1/2$.

La probabilità u di visitare l'origine (il punto 0) vale 1 in 0; per $x > 0$ è armonica, ossia pari alla semisomma dei suoi valori nei punti adiacenti; in una parola, è una funzione *lineare*; dovendo essere limitata, è necessariamente costante. Il problema è risolto: nella passeggiata semplice, la probabilità di visitare l'origine è sempre 1, quale che sia il punto di partenza $x \geq 0$ (data la simmetria, anche per $x \leq 0$) ! ♢

Ma talvolta la prescrizione (2.1) non basta a risolvere il problema:

(2.3) Esempio. La *passeggiata asimmetrica*.

Gli stati sono ancora gli interi relativi, ma le probabilità di transizione sono ora $\mathrm{P}(x, x+1) = 2/3$, $\mathrm{P}(x, x-1) = 1/3$.

La probabilità $u(x)$ di visitare l'origine partendo da x vale 1 in 0; per $x > 0$ è ancora armonica, ma ora ciò significa che i successivi incrementi $u(x+1) - u(x)$ $(x = 0, 1, \ldots)$ si dimezzano continuamente.

Anche a volersi limitare alle sole soluzioni di (2.1) che si mantengono comprese tra zero e 1, ne restano infinite, tutte quelle della forma $(1-\alpha)+\alpha\, 2^{-x}$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ (lascio volentieri i dettagli al lettore). ♢

Per cavarsi d'impaccio in casi come questo, nei quali il problema (2.1) ha più di una soluzione, riesce utile scoprire che la probabilità di visitare F è *la più piccola* di tali soluzioni.

A tale scopo giova affinare l'analisi della questione, facendo entrare in gioco la variabile tempo; per ogni n, indichiamo con $u_n(x)$ la probabilità, partendo dallo stato x, di visitare l'insieme F *entro il tempo* n. Banalmente, u_0 coincide con I_F, la funzione indicatrice di F (quella che si annulla fuori di F e vale 1 in F). Facendo poi tendere n all'infinito, $u_n(x)$ tenderà chiaramente verso $u_F(x)$.

Se rifacciamo l'esame della prima transizione, otteniamo le relazioni

$$u_n(x) = 1 \quad (x \in F) \qquad u_{n+1}(x) = \sum_y \mathrm{P}(x, y)\, u_n(y) \quad (x \notin F) \tag{2.4}$$

che ci permettono di enunciare la

(2.5) Proposizione. *La probabilità di visitare l'insieme F è la minima tra le funzioni positive che valgono 1 in F e sono armoniche fuori di F.*

Dim. La funzione u_F verifica le condizioni enunciate. Sia ora f una funzione che verifica tali condizioni; proviamo per induzione che $f \geq u_n$ per ogni n; che sia $f \geq u_0$ è evidente; fatta l'ipotesi induttiva $f \geq u_n$, dal fatto che f è armonica fuori F e dalle relazioni (2.4) segue la disuguaglianza $f \geq u_{n+1}$ per $x \notin F$ (e banalmente anche per $x \in F$).

Pertanto $f \geq u_n$ per ogni n; facendo tendere n all'infinito, $f \geq u_F$. $\diamondsuit$

Nel caso dell'esempio (2.3) si ottiene che la probabilità di visitare l'origine partendo da x è 2^{-x} per $x > 0$, mentre vale 1 per $x \leq 0$.

3. ricorrenza

Legato al problema della visita è quello del *ritorno*: partendo da uno stato s, qual è la probabilità di tornarvi, cioè di visitare s dopo l'istante zero ?

Dall'esame della prima transizione si vede che questa probabilità vale $\sum_y \mathrm{P}(s,y)\, u_{\{s\}}(y)$; nella passeggiata semplice dell'esempio (2.2) la probabilità di tornare nell'origine è dunque 1, mentre nella passeggiata asimmetrica dell'esempio (2.3) la corrispondente probabilità è $(2/3)\ (1/2) + 1/3 = 2/3$.

In ogni modo, due sono le alternative: se la probabilità di ritorno nello stato vale 1, lo stato si chiama *ricorrente*; se invece è minore di 1, lo stato si chiama *transitorio*.

Come abbiamo visto, l'origine è uno stato ricorrente nella passeggiata semplice, transitorio in quella asimmetrica.

Vediamo come gioca l'assenza di memoria in questa situazione. †

Prendiamo una catena che parte da uno stato ricorrente r; prima o poi, essa vi ritorna (con probabilità 1, o – come dicono i matematici – "quasi certamente", abbreviato in "qc"); a quel punto, essa riparte da r come nulla fosse, e dunque torna di nuovo in r qc, e così di seguito, e in definitiva compie in r *infiniti ritorni*.

Se la catena parte da uno stato transitorio s, solo con una certa probabilità $q < 1$ essa tornerà nello stato di partenza; posto che vi si trovi, ne riparte come nulla fosse; pertanto la probabilità di avere un secondo, un terzo, un n–esimo ritorno sarà rispettivamente q^2, q^3, ..., q^n; dal momento che $q < 1$, i numeri q^n tendono a zero al crescere di n.

† al lettore non sfuggirà che l'assenza di memoria fu stabilita per un istante n fisso; qui me ne servo per l'istante di ritorno nello stato, che è *aleatorio* ! Sto dunque barando, ma farò ammenda in appendice.

Conclusione: uno stato transitorio riceve (qc) *un numero finito di visite*.

Ciò comporta che se gli stati sono in numero finito non possono essere tutti transitori (esaurito il numero finito di visite, la catena non saprebbe più dove andare. . .).

Gli stati transitori sono in qualche modo meno interessanti, perché troppo effimeri; ben più ricca la dinamica legata a quelli ricorrenti, in quanto la storia di una catena che parte da uno stato ricorrente viene naturalmente scandita dai suoi ricorsi e suddivisa in *cicli di ricorrenza* nello stato di partenza.

Il fatto che una tale catena ritorni infinite volte nelle condizioni iniziali ha conseguenze assai rilevanti.

Per dirne una: partendo da uno stato ricorrente, la catena visita tutti gli stati potenzialmente raggiungibili.

Dicendo che lo stato b è raggiungibile dallo stato a (ma il termine tecnico è *accessibile*) intendo che la probabilità di visitare b partendo da a non è nulla; per $a \neq b$, ciò significa che esiste un cammino che parte da a e giunge in b ed è formato da transizioni di probabilità non nulla; ogni stato è poi chiaramente accessibile da se stesso.

L'affermazione fatta sopra si formalizza nel seguente

(3.1) Teorema. *Supponiamo che lo stato a sia accessibile dallo stato ricorrente r. Allora:*

(a) *partendo da a si visita r (qc)*

(b) *partendo da r si visita a (qc)*

(c) *anche lo stato a è ricorrente (la ricorrenza è "contagiosa").*

Dim. La tesi è banalmente vera quando $a = r$, perciò supponiamo senz'altro che sia $a \neq r$.

(a) Se la probabilità di visitare r partendo da a fosse minore di 1, esisterebbe una via di fuga che parte da r, giunge in a e non ripassa più da r, in contrasto con l'ipotesi che r è ricorrente;

(b) Esiste un cammino da r ad a; pur di asportare eventuali "circuiti", ne esiste anzi uno che non ripassa da r; partendo da r, la probabilità q di tornare in r senza aver visitato a è dunque minore di 1.

Ad ogni ritorno, tutto riprende ex novo; pertanto la probabilità di mancare la visita in a nei primi due, tre, . . . , n cicli di ricorrenza sarà rispettivamente q^2, q^3, . . . , q^n; come al solito, q^n tende a zero e dunque la visita non potrà evitarsi in eterno.

A forza di insistere, la catena riesce prima o poi a visitare a; è lo stesso principio che usammo per discutere gli stati transitori: *gutta cavat lapidem*!

(c) Mettendo insieme (a) e (b), risulta chiaro che partendo da a si ritorna in a (qc). ♢

Le conseguenze sono spettacolari per una catena *connessa*†, nella quale cioè ogni stato sia accessibile da ogni altro; se la catena è connessa, gli stati sono tutti transitori oppure tutti ricorrenti; in questo secondo caso, la catena li visita tutti, ciascuno infinite volte.

La passeggiata semplice dell'esempio 2.2 è per l'appunto ricorrente connessa.

4. distribuzioni invarianti

L'evoluzione di una catena di Markov è manifestamente aleatoria, ma la distribuzione di probabilità della posizione della catena viene trasformandosi secondo regole ben precise.

Per distribuzione di probabilità della catena all'istante n intendiamo ovviamente la *legge* di X_n, data dalla famiglia di numeri $P(X_n = x)$ (uno per ogni stato x).

Da un semplice calcolo, che fa intervenire le probabilità di transizione, si ottiene la relazione di evoluzione

$$P(X_{n+1} = x) = \sum_y P(X_n = y, X_{n+1} = x) = \sum_y P(X_n = y)\,\mathrm{P}(y, x)$$

che, usando l'abbreviazione $\mu_n = P(X_n = x)$, si riscrive

$$\mu_{n+1}(x) = \sum_y \mu_n(y)\ \mathrm{P}(y, x) \tag{4.1}$$

e sovente si sintetizza nella forma $\mu_{n+1} = \mu_n\,\mathrm{P}$.

Una distribuzione di probabilità π per la quale si abbia $\pi = \pi\,\mathrm{P}$ viene detta *invariante* e corrisponde intuitivamente ad una situazione di "equilibrio dinamico": se una catena all'istante iniziale ha distribuzione invariante, essa la conserva ad ogni istante, in virtù della (4.1): è una catena *stazionaria*.

(4.2) Proposizione. *Se la catena è connessa e π è una distribuzione invariante, deve aversi $\pi(x) > 0$ per ogni x.*

Dim. Se π avesse "un buco", ossia uno stato a nel quale $\pi(a)$ si annulla, il buco finirebbe per propagarsi dappertutto; dalla relazione di invarianza

$$0 = \pi(a) = \sum_y \pi(y)\ \mathrm{P}(y, a)$$

† veramente i matematici dicono *irriducibile*

segue infatti $\pi(y) = 0$ in ogni y per il quale $\mathrm{P}(y, a) > 0$ (cioè per il quale esiste una transizione positiva verso a); per iterazione, π si annulla in ogni stato dal quale a è accessibile, e quindi dappertutto, essendo la catena connessa. $\diamondsuit$

Una distribuzione invariante di probabilità, se esiste, risiede negli stati ricorrenti:

(4.3) PROPOSIZIONE. *Se π è una distribuzione invariante di probabilità e nello stato a si ha $\pi(a) > 0$, allora lo stato a è ricorrente.*

DIM. Sia X_n una catena stazionaria di legge invariante π; se lo stato a è transitorio, esso riceve un numero finito di visite. È dunque finito l'istante (aleatorio) L dell'ultima visita della catena in a; si ha pertanto

$$\pi(a) = P(X_n = a) \leq P(L \geq n) \to 0$$

$\diamondsuit$

Affinché esista una distribuzione invariante di probabilità, occorre dunque che ci siano stati ricorrenti; ma la condizione non è affatto sufficiente: per la passeggiata semplice (in cui tutti gli stati sono ricorrenti) una distribuzione invariante dovrebbe essere uniforme, e questo è incompatibile con il requisito di avere somma uguale a 1.

Tornerò sul problema nei capitoli 6 e 7.

5. tendenza alla stazionarietà

Quando accade che le leggi di una catena di Markov tendono a una legge limite ? Detto meglio: in quali casi esiste una legge (distribuzione invariante di probabilità) μ tale che $P(X_n = x)$ tenda a $\mu(x)$ al tendere di n all'infinito, per ogni stato x ?

Facendo tendere n all'infinito nella (4.1), si vede che la legge limite, se esiste, deve essere invariante[†].

La convergenza delle leggi, quando si manifesta, è dunque sempre una tendenza alla stazionarietà.

Ma l'esistenza di leggi invarianti è tutt'altro che sufficiente per la convergenza:

(5.1) ESEMPIO. Si prenda una catena con due stati, r e s, con probabilità di transizione $\mathrm{P}(r, s) = \mathrm{P}(s, r) = 1$; la catena è connessa e la distribuzione uniforme $\pi(r) = \pi(s) = 1/2$ è invariante (ed è l'unica); ma se la catena parte

[†] la faciloneria di quest'affermazione è palese; vi porrò come al solito rimedio in appendice

da r, la probabilità di trovarla in r negli istanti successivi vale alternativamente 0 e 1 (e non tende evidentemente ad alcun limite). $\diamondsuit$

Per ottenere buoni risultati di convergenza, occorre rafforzare le ipotesi, e supporre che la catena (oltre a possedere una legge invariante) sia *ultraconnessa* †: per ogni x, y e a, esistano un cammino da a a x e un cammino da a a y *aventi uguale lunghezza*.

Chiaramente una catena ultraconnessa è connessa; nell'esempio (5.1) la catena è connessa ma non ultraconnessa (si prenda $a = x = r$, $y = s$).

Con queste premesse, si dimostra il seguente teorema di tendenza alla stazionarietà, uno dei più importanti sulle catene di Markov.

(5.2) TEOREMA. *Siano X_n una catena ultraconnessa, π una distribuzione invariante di probabilità. Allora $P(X_n = x)$ tende a $\pi(x)$ per ogni x.*

DIM. La dimostrazione richiede un certo impegno, ma ne vale la pena.

Si basa sull'idea del raddoppio, che consiste nel considerare simultaneamente *due copie* dell'oggetto che si vuole studiare.

Nel nostro caso, una coppia (X_n, Y_n) di catene indipendenti, considerata globalmente come una sola catena i cui possibili stati sono le coppie ordinate di stati; le due coordinate si muovono indipendentemente, e le probabilità di transizione per la coppia sono date dal prodotto delle probabilità di transizione per le due coordinate:

$$\widetilde{\mathrm{P}}\big((x,y),(x',y')\big) = \mathrm{P}(x,x')\,\mathrm{P}(y,y')$$

Un facile esercizio di calcolo mostra che la distribuzione

$$\widetilde{\pi}(x,y) = \pi(x)\,\pi(y)$$

è invariante per la catena coppia. Procediamo per passi.

(i) poiché X_n è connessa, si ha $\pi(a) > 0$ (proposizione 4.2) e dunque $\widetilde{\pi}(a,a) = \pi(a)^2 > 0$; perciò lo stato (a,a) è ricorrente (proposizione 4.3);

(ii) per l'ipotesi di ultraconnessità, dati comunque gli stati x e y, è possibile portare *simultaneamente* la prima coordinata da a a x e la seconda da a a y: esiste cioè un cammino *dalla coppia* (a,a) alla coppia (x,y); in altre parole, lo stato (x,y) è accessibile dallo stato (ricorrente) (a,a); (a questo serve l'ipotesi di ultraconnessità !).

(iii) partendo da (x,y), la catena coppia visita lo stato (a,a) qc (per la parte facile (a) del teorema 3.1); pertanto, quale che sia la loro condizione di partenza, le catene X_n e Y_n si incontrano (presto o tardi) nello stato a;

† i matematici dicono *aperiodica*

(iv) si intuisce che, dopo essersi incontrate, le due catene procedano con la stessa legge; ma quest'affermazione va formulata in modo preciso.

Sia T il primo istante (aleatorio) nel quale entrambe le catene si trovano nello stato a; l'evento $\{T = k\}$ è anteriore all'istante k; sfruttando la relazione (1.3), si vede che $P(T = k, X_n = x) = P(T = k, Y_n = x)$ per $n \geq k$; sommando per $k \leq n$ si ha l'uguaglianza

$$P(T \leq n, X_n = x) = P(T \leq n, Y_n = x)$$

dalla quale segue facilmente

$$\big|P(X_n = x) - P(Y_n = x)\big| \leq P(T > n) \to 0 \tag{5.3}$$

Basta a questo punto prendere Y_n stazionaria, con legge invariante π, per completare la dimostrazione. ♢

Dopo lo sforzo, gustiamoci il risultato: nelle ipotesi del teorema (5.2), qualunque ne sia la situazione iniziale, la probabilità di trovare la catena nei vari possibili stati si avvicina con il passare del tempo ("a regime") alla distribuzione invariante π, individuata solo dal "meccanismo evolutivo", cioè dalle probabilità di transizione.

In molti casi, risulta prezioso il seguente criterio di ultraconnessità:

(5.4) Proposizione. *Data una catena connessa, affinché essa sia ultraconnessa basta che esistano uno stato a, un numero naturale k e due "lacci", cammini che vanno entrambi da a ad a, di lunghezza rispettiva k e $k+1$. In particolare, risulta ultraconnessa una catena connessa che possiede uno stato a con $\mathrm{P}(a, a) > 0$ (caso $k = 0$).*

Dim. Dati comunque gli stati u, v, x, y, è facile costruire due cammini di ugual lunghezza, uno da u a x e uno da v a y.

Andare da u ad a e di qui a x è possibile in virtù della connessità; pure possibile è andare da v ad a e quindi a v; i due cammini non avranno in genere ugual lunghezza, ma si riesce a pareggiarli "parcheggiandoli" nello stato a, cioè inserendo un giusto numero di "lacci corti" nel cammino più lungo, e di "lacci lunghi" nel più corto. ♢

Il teorema (5.2) ha poi un'altra interessante conseguenza.

(5.5) Proposizione. *Se una catena connessa possiede una distribuzione invariante di probabilità, questa è unica.*

Dim. Per una catena ultraconnessa, la conclusione discende automaticamente dal teorema (5.2), unico essendo il limite enunciato nella tesi (quando esiste).

Se P sono le probabilità di transizione di una catena connessa, usiamo un trucco: poniamo $\mathrm{I}(x, x) = 1$ e $\mathrm{I}(x, y) = 0$ per $x \neq y$; allora $\overline{\mathrm{P}} = (\mathrm{P} + \mathrm{I})/2$

sono probabilità di transizione di una catena pure connessa, per la quale si ha $\overline{\mathrm{P}}(x,x) \geq 1/2$, dunque ultraconnessa in virtù della proposizione (5.4).

Ma P e $\overline{\mathrm{P}}$ ammettono le stesse distribuzioni invarianti (verificare!). ♢

6. ricorrenza veloce

Facciamo un passo indietro, per tornare alla discussione svolta nel capitolo 3.

Come si è detto, una catena che parte da uno stato ricorrente r ritorna (qc) nello stato di partenza.

Si danno però due possibilità, a seconda che il tempo di ritorno (aleatorio) abbia speranza† finita (nel qual caso diremo che lo stato ricorrente r è *veloce*), oppure infinita (e diremo che è *lento*).

Si ripropone per la velocità una situazione analoga a quella incontrata nel teorema (3.1): partendo da uno stato ricorrente *veloce*, la catena visita “in fretta” tutti gli stati da esso accessibili.

(6.1) Teorema. *Se lo stato a è accessibile dallo stato veloce r, allora una catena che parte da r visita a in un tempo medio finito.*

Dim. Si tratta di affinare il ragionamento della dimostrazione di (3.1); al lettore richiederò qualche ulteriore nozione probabilistica.

Indichiamo sempre con q la probabilità di fallire la visita in a nel corso di un ciclo di ricorrenza, con $F_1, F_2, F_3, \ldots$ gli eventi “la visita in a fallisce nel primo, nei primi due, nei primi tre, ..., cicli di ricorrenza”; come si è visto, F_n ha probabilità q^n.

Siano $R_1, R_2, \ldots$ le successive durate (aleatorie) dei cicli di ricorrenza.

Se T denota il primo istante (aleatorio) nel quale una catena che parte da r visita a, risulta ovvia la maggiorazione

$$T \leq R_1 + R_2\, I_{F_1} + R_3\, I_{F_2} + \cdots \tag{6.2}$$

A causa dell'assenza di memoria, la variabile aleatoria R_2 è indipendente dall'evento F_1; in modo analogo, R_{n+1} è indipendente da F_n (per ogni $n \geq 1$); questo comporta che, in ciascun addendo del secondo membro della (6.2), la speranza del prodotto sia il prodotto delle speranze. In una parola, si ha

$$E\big(R_{n+1}\, I_{F_n}\big) = E(R_{n+1})\, P(F_n) = E(R_{n+1})\, q^n \quad (n \geq 1)$$

Sempre per l'assenza di memoria, le variabili aleatorie $R_1, R_2, R_3, \ldots$ hanno tutte la stessa speranza, quella di R_1 (finita per ipotesi).

† sinonimi: *valor atteso, valor medio*

Se ne deduce la maggiorazione

$$E(T) \leq E(R_1)\ (1 + q + q^2 + \cdots) \tag{6.3}$$

e la convergenza della serie geometrica del secondo membro chiude la prova.$\diamondsuit$

Anche l'inizio del capitolo 2 merita di essere rivisitato.

Dato un insieme H di stati, possiamo indicare con $t_H(x)$ il valor atteso del tempo necessario, partendo da x, per visitare l'insieme H.

Ovviamente, $t_H(x)$ si annulla per $x \in H$; se $x \notin H$, ragioniamo sulla prima transizione; da x la catena passa in y con probabilità $\mathrm{P}(x, y)$ (ma nel frattempo è trascorso un istante). Sussiste pertanto la relazione

$$t_H(x) = 1 + \sum_y \mathrm{P}(x, y)\, t_H(y) \quad (x \notin H) \tag{6.4}$$

analoga alla relazione (2.1) ricavata a suo tempo per le probabilità di visita.

Anche qui, come allora, la soluzione del problema (6.4) non è necessariamente unica; e ancora si può far vedere che la funzione t_H è in verità *la più piccola* soluzione di (6.4).

Su questo argomento preferisco tuttavia sorvolare: mi preme un altro tema, la questione (rimasta in qualche modo in sospeso) delle distribuzioni invarianti di probabilità.

Uno stato ricorrente veloce garantisce l'esistenza di una tale distribuzione.

Vediamo di spiegare il perché, studiando le visite che una catena, partita da uno stato ricorrente veloce, compie nei vari stati prima di ritornare nello stato di partenza.

Se $V(x)$ indica il numero (aleatorio) di tali visite nello stato x, per lo stato di partenza r si ha banalmente $V(r) = 1$; inoltre la somma di $V(x)$ fatta per tutti gli x coincide con il tempo totale trascorso prima del ritorno nello stato di partenza, che indicheremo con S (è la durata del primo ciclo di ricorrenza, quella che poco fa denotammo con R_1).

Se lo stato di partenza si suppone veloce, S ha speranza finita; a maggior ragione $V(x)$, maggiorata da S, ha una speranza finita $\sigma(x) = E(V(x))$.

I numeri $\sigma(x)$ formano la cosiddetta *distribuzione delle visite*.

Ebbene, questa è invariante; non è una distribuzione invariante di probabilità poiché la somma $\sum_x \sigma(x) = E(S)$ non vale 1; tale somma è tuttavia *finita*; basta allora normalizzare la distribuzione, cioè porre

$$\pi(x) = \frac{\sigma(x)}{\sum_x \sigma(x)} = \frac{\sigma(x)}{E(S)} \tag{6.5}$$

per ottenere una vera e propria distribuzione invariante di probabilità !

Resta da verificare l'invarianza (occorrono un po' di calcoli); enunceremo insomma il seguente

(6.6) Teorema. *La distribuzione delle visite relativa a uno stato ricorrente veloce è invariante.*

Dim. Siano r lo stato veloce, S il tempo di ritorno in r della catena X_n partita da r; con i simboli precedenti, si ha

$$V(x) = \sum_{0 \le n < S} I_{\{X_n = x\}} = \sum_{n \ge 0} I_{\{X_n = x\}} \, I_{\{S > n\}}$$

$$\sigma(x) = E\Big(\sum_{0 \le n < S} I_{\{X_n = x\}} \Big) = \sum_{n \ge 0} P(X_n = x, S > n)$$

La chiave della verifica sta nel riconoscere che l'evento $\{S > n\}$ è *anteriore* a n; dalla relazione (1.2) discende dunque l'uguaglianza

$$P(X_n = y, S > n) \, \mathrm{P}(y, x) = P(X_{n+1} = x, X_n = y, S > n)$$

Sommando per tutti gli y e tenendo conto che $X_0 = X_S$, ne segue

$$\sum_y \sigma(y) \, \mathrm{P}(y, x) = \sum_y \left(\sum_{n \ge 0} P(X_n = y, S > n) \right) \mathrm{P}(y, x) =$$

$$= \sum_{n \ge 0} \sum_y P(X_n = y, S > n) \, \mathrm{P}(y, x) = \sum_{n \ge 0} \sum_y P(X_{n+1} = x, X_n = y, S > n) =$$

$$= \sum_{n \ge 0} P(X_{n+1} = x, S > n) =$$

$$= \sum_{n \ge 0} P(X_{n+1} = x, S > n + 1) + \sum_{n \ge 0} P(X_{n+1} = x, S = n + 1) =$$

$$= \sum_{n \ge 1} P(X_n = x, S > n) + \sum_{n \ge 1} P(X_S = x, S = n) =$$

$$= \big(\sigma(x) - P(X_0 = x) \big) + P(X_S = x) = \sigma(x)$$

La dimostrazione è conclusa. $\diamondsuit$

7. leggi invarianti e ricorrenza veloce

Alla fine del capitolo precedente abbiamo scoperto una condizione sufficiente per l'esistenza di una distribuzione invariante di probabilità; cerchiamo ora condizioni necessarie.

Come primo passo, stabiliamo il seguente

(7.1) LEMMA. *In una catena connessa provvista di una distribuzione invariante π di probabilità, ogni distribuzione invariante è multipla di π, in particolare ha somma finita.*

DIM. Adotteremo una tecnica originale e ingegnosa. Siano P le probabilità di transizione della catena; dato che $\pi(x)$ non si annulla mai (proposizione 4.2), ha senso porre

$$\widehat{\mathrm{P}}(x,y) = \frac{\pi(y)\,\mathrm{P}(y,x)}{\pi(x)}$$

Il bello è che $\widehat{\mathrm{P}}$ sono probabilità di transizione (verificare !) di una catena (*duale* di quella data).

Ogni cammino da a a b per la catena data costituisce, invertendone il senso, un cammino da b ad a per la duale; pertanto anche la duale è connessa. Ma non solo: poiché la distribuzione π è invariante anche per la catena duale (verificare !), questa è ricorrente grazie alla proposizione (4.3).

Se $\nu(x)$ è una distribuzione invariante per la catena data, un calcolo elementare mostra che la funzione (positiva) $f(x) = \nu(x)/\pi(x)$ risulta armonica *per la catena duale*. Basterà dimostrare che questa funzione è costante.

Supponiamo esista uno stato a per il quale $f(a) > 0$ (in caso contrario, f sarebbe banalmente costante in quanto identicamente nulla); la funzione $g(x) = f(x)/f(a)$ vale 1 in a ed è armonica dappertutto, in particolare fuori di a (per la catena duale).

Grazie alla caratterizzazione minimale contenuta nella proposizione (2.5), g è non minore della probabilità che la catena (duale) visiti a, che per parte sua vale identicamente 1 in virtù della connessità e ricorrenza della catena duale.

In conclusione, si ha $f \geq f(a) > 0$; la conclusione si applica allora ad ogni scelta di a, e ciò obbliga f ad essere costante. $\diamondsuit$

Il lettore osserverà che dal lemma discende in particolare la (5.5).

Riprendiamo la nozione di distribuzione delle visite. Noteremo che la dimostrazione del teorema (6.6) continua a stare in piedi anche se lo stato ricorrente r è lento[†], solo che ora la somma $\sum_x \sigma(x)$, pari alla speranza del tempo di ritorno nello stato, sarà infinita.

[†] se lo stato ricorrente è lento, non è subito chiaro però che i numeri $\sigma(x)$ sono finiti; nel purgatorio dell'appendice espierò anche questa leggerezza

Una prima conseguenza di quest'osservazione è la seguente:

(7.2) Proposizione. *Se lo spazio degli stati è finito, esiste sempre una distribuzione invariante di probabilità.*

Dim. Dal capitolo 3 sappiamo che esiste uno stato ricorrente; la relativa distribuzione delle visite ha necessariamente somma finita, e normalizzandola come in (6.5) si ottiene una distribuzione invariante di probabilità. ♢

Dall'osservazione, alla luce del lemma (7.1), si trae un'altra conseguenza, ancora più significativa:

(7.3) Proposizione. *In una catena connessa provvista di una distribuzione invariante di probabilità, tutti gli stati sono ricorrenti veloci.*

Un'ultima osservazione (supponiamo per semplicità che la catena sia connessa): se π è una distribuzione invariante di probabilità, da (7.3) e (6.5) discende che, per ogni x, il valore $\pi(x)$ coincide con il reciproco della speranza del tempo di ritorno in x partendo da x.

8. un modello per le file d'attesa

Immaginiamo che utenti accedano in sequenza a un servizio (sportello postale, distributore di benzina e simili); se il servizio è impegnato con un utente, gli altri attendono in coda il loro turno.

Man mano sopraggiungono nuovi utenti, che si aggiungono alla coda oppure accedono direttamente al servizio se questo è libero.

Sia α_k la probabilità che gli utenti sopraggiunti nel corso di un turno di servizio siano k $(k = 0, 1, \ldots)$.

Siamo indotti a definire una catena di Markov il cui generico stato è il numero totale di utenti presenti nel servizio (tanto quelli in coda che quello che viene servito) e le probabilità di transizione sono date da

$$\mathrm{P}(0,k) = \alpha_k \qquad P(j, k+j-1) = \alpha_k \quad (j > 0)$$

e si leggono meglio nell'abituale forma di matrice

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

(l'arrivo di k nuovi utenti porta il totale a k quando il servizio è libero; quando sono presenti j utenti, uno viene servito ed esce, e complessivamente ne restano $j-1+k$; le prime due righe della matrice sono pertanto uguali).

Otteniamo un modello della fila d'attesa, in verità piuttosto rudimentale (stiamo tacitamente adottando l'ipotesi, poco realistica, che il numero di nuovi utenti non dipenda dall'ora né dalle condizioni di affollamento del servizio), ma a suo modo istruttivo.

Rudimentale o no, l'analisi del modello si rivelerà impegnativa e interessante dal punto di vista matematico.

Sarà decisivo il valore atteso $m = \sum_k k\,\alpha_k$ del numero di utenti che giungono nel corso di un tempo di servizio.

Per evitare situazioni banali, supporremo $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_0 + \alpha_1 < 1$; in tal modo, la catena risulta connessa (com'è facile vedere); dal momento che $\mathrm{P}(0,0) = \alpha_0 > 0$, è addirittura ultraconnessa (grazie alla proposizione 5.4) .

Nello studio della catena, trarremo partito da due sue peculiarità:

(a) lo stato può decrescere solo di un'unità alla volta (parleremo di “gradualità discendente”);

(b) per $j > 0$, le probabilità di transizione da j a h dipendono solo *dalla differenza* $h - j$ (chiameremo “uniformità” questo fatto).

PROBABILITÀ DI VISITA E RICORRENZA

Studiamo per prima cosa la probabilità $u(x)$ di visitare lo stato 0 partendo da x. Poniamo $s = u(1)$; chiaramente, si ha $s \geq \mathrm{P}(1,0) = \alpha_0 > 0$.

Per uniformità, la probabilità $w(j+1,j)$ di visitare j partendo da $j+1$ è la stessa per tutti i valori di j, e dunque coincide con $u(1) = s$.

Esaminiamo ora l'effetto della gradualità discendente: per visitare 0 partendo da 2 occorre dapprima visitare 1 (con probabilità $w(2,1) = s$); poi la catena riparte da 1 in assenza di memoria, e visita 0 con probabilità $w(1,0) = u(1) = s$; conclusione: $u(2) = s^2$.

Si capisce che un simile ragionamento può tranquillamente essere iterato, e porta a concludere che

$$u(k) = s^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8.2}$$

Resta però da determinare il valore di s.

La funzione u è caratterizzata dalla proposizione (2.5): essa è la minima funzione positiva che vale 1 nell'origine ed è armonica fuori; d'altra parte ha la forma (8.2), e tanto vale cercare il minimo tra le funzioni *di questa forma* che sono armoniche fuori dall'origine.

La condizione di armonicità nello stato $j > 0$ si scrive

$$u(j) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(j, j+k-1)\, u(j+k-1) =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \alpha_k s^{j+k-1} = s^j\, s^{-1} \sum_{k\geq 0} \alpha_k s^k = u(j)\, s^{-1} \sum_{k\geq 0} \alpha_k s^k$$

ossia

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k s^k = s \tag{8.3}$$

Dato che s^k cresce al crescere di s, si tratta di trovare la minima soluzione $s > 0$ dell'equazione (8.3), e poi sostituirne il valore nella (8.2).

S'impone un rapido studio della funzione $\Lambda(x) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k x^k$ nell'intervallo $[0,1]$†; si ha $\Lambda(0) = \alpha_0 > 0$, $\Lambda(1) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k = 1$; la funzione è positiva continua crescente, con derivata $\Lambda'(x) = \sum_{k\geq 1} k\alpha_k x^{k-1}$ definita per $0 \leq x < 1$ pure continua e crescente.

Avvicinandosi a 1 da sinistra, $\Lambda'(x)$ tende verso $\sum_k k\alpha_k = m$.

Con l'aiuto eventuale di uno schizzo, confrontando l'inclinazione della tangente al grafico di Λ nel punto $(1\,,1)$ con quella della retta $y = x$, si riconosce senza difficoltà:

i) se $m \leq 1$, l'equazione $\Lambda(x) = x$ ha la sola soluzione $x = 1$; da (8.2) si ha $u(k) = 1$ per ogni k; la probabilità di tornare in 0 partendo da 0 vale 1; lo stato 0 è ricorrente, e lo sono tutti per la connessità; la lunghezza della coda passa per tutti i valori possibili (anche se m fosse molto piccolo);

ii) se $m > 1$, esiste anche una soluzione s con $0 < s < 1$, che dunque è la più piccola; si ha $u(k) = s^k$; la probabilità di tornare in 0 partendo da 0 è data da $\sum_k \mathrm{P}(0,k)u(k) = \sum_k \alpha_k s^k = \Lambda(s) = s < 1$ (vedi capitolo 3); lo stato 0 è transitorio (e gli altri con esso); ogni insieme finito di stati riceve un numero finito di visite, ossia la lunghezza della coda tende all'infinito con il trascorrere del tempo (intuitivamente, sono conseguenze immaginabili, visto che durante il tempo di servizio di un singolo utente arriva in media più di un utente ulteriore).

RICORRENZA VELOCE

Indichiamo con $t(x,y)$ il tempo medio (non necessariamente finito) che occorre per visitare lo stato y partendo da x, e poniamo $t = t(1,0)$. Per uniformità, sarà $t(j,j-1) = t$ per ogni $j > 0$.

La gradualità discendente, da parte sua, comporta la relazione additiva

$$t(k,0) = t(k,k-1) + t(k-1,k-2) + \cdots + t(1,0) = k\,t(1,0) = kt \tag{8.4}$$

Abbiamo visto che si ha ricorrenza solo per $m \leq 1$; scopriremo ora che la ricorrenza è veloce per $m < 1$, lenta per $m = 1$.

† al lettore meno esperto suggerisco di supporre nulli i numeri α_k da un certo indice in poi, semplificazione questa che rende Λ un docile polinomio

i) Se uno stato è veloce, e quindi esiste una distribuzione invariante di probabilità, tutti gli stati sono veloci (proposizione 7.3).

I tempi di passaggio da uno stato all'altro hanno tutti media finita (teorema 6.1); in particolare, $t = t(1,0)$ è finito.

Scrivendo l'equazione (6.4) per $H = \{0\}$, $x = 1$ e tenendo conto della relazione (8.4), si ottiene

$$t = 1 + \sum_k \mathrm{P}(1,k)\, kt = 1 + t \sum_k \alpha_k = 1 + tm \tag{8.5}$$

uguaglianza chiaramente impossibile quando $m = 1$.

ii) Discutiamo il caso $m < 1$ (un po' meno semplice). Consideriamo una catena X_n che parte dallo stato 1 e sia T l'istante della sua prima visita in 0; per abbreviare, poniamo $\beta = 1 - m > 0$ e indichiamo con il simbolo $T \wedge n$ il minimo tra T e n.

Basta un attimo di riflessione per convincersi che sussiste l'identità

$$\begin{aligned} X_0 + (X_1 - X_0 + \beta)\, I_{\{T>0\}} + (X_2 - X_1 + \beta)\, I_{\{T>1\}} + \cdots \\ \cdots + (X_n - X_{n-1} + \beta)\, I_{\{T>n-1\}} = X_{T\wedge n} + \beta\, T \wedge n \end{aligned} \tag{8.6}$$

Ovviamente, $X_0 = 1$; il punto delicato sta nel riconoscere che, nel primo membro della (8.6), tutti gli altri addendi *hanno speranza nulla*.

Prendiamo ad esempio l'addendo

$$(X_3 - X_2 + \beta)\, I_{\{T>2\}} = (X_3 - X_2 + 1)\, I_{\{T>2\}} - m\, I_{\{T>2\}} \tag{8.7}$$

L'evento $\{T > 2\}$ è anteriore all'istante 2; dalla matrice di transizione (8.1) si vede che la distribuzione di $(X_3 - X_2 + 1)$ condizionata a tale evento è espressa dai numeri α_k, per cui la sua speranza condizionata vale m; l'addendo (8.7) ha quindi speranza nulla; lo stesso discorso vale per tutti gli addendi.

Passando alle speranze nella (8.6), si ha allora

$$1 = E(X_{T\wedge n} + \beta\, T \wedge n) \geq \beta\, E(T \wedge n)$$

da cui, facendo tendere n all'infinito (e notando che $T \wedge n$ tende crescendo verso T), si deduce $1 \geq \beta\, E(T) = \beta\, t(1,0) = \beta\, t = (1-m)\, t$.

Riassumendo: quando $m < 1$, si trova che t è finito; solo ora ci è lecito usare l'equazione (8.5), che ce ne fornisce il valore: $t = 1/(1-m)$; ne segue $t(k,0) = k/(1-m)$.

Il peggio è passato. Ragionando sulla prima transizione, come facemmo per ricavare l'equazione (6.4), possiamo calcolare il tempo medio di ritorno in 0 di una catena che parte da 0, nella forma

$$1 + \sum_k \mathrm{P}(0,k)\, t(k,0) = 1 + \sum_k \alpha_k\, k\, t = 1 + \frac{m}{1-m} = \frac{1}{1-m} \tag{8.8}$$

e ottenere un valore finito. Lo stato 0 si rivela ricorrente veloce.

A questo punto possiamo metter mano a tutto l'arsenale dei nostri teoremi (6.5, 5.5, 7.3, 5.2, 4.2) ed enunciare:

se $m < 1$, tutti gli stati sono ricorrenti veloci, esiste una distribuzione invariante π di probabilità ed è unica; con il trascorrere del tempo, la catena tende ("a regime") verso questa distribuzione.

LA DISTRIBUZIONE DELLA CODA A REGIME

Le condizioni della coda a regime sono rappresentate dalla (unica) distribuzione invariante di probabilità π; la proposizione (4.2) ci dice che π non si annulla mai: c'è sempre una probabilità, anche se piccola, che la coda abbia una lunghezza arbitrariamente grande a regime.

Dall'affermazione finale del capitolo 7 sappiamo poi che che il valore $\pi(x)$ è il reciproco del tempo medio che occorre per tornare in x partendo da x; la probabilità di trovare libero il servizio (a regime) è dunque $\pi(0) = 1 - m$.

La relazione di invarianza $\pi = \pi \mathrm{P}$ nel nostro caso si scrive

$$\pi(n) = \alpha_n \, \pi(0) + \alpha_n \, \pi(1) + \alpha_{n-1} \, \pi(2) + \ldots + \alpha_1 \, \pi(n) + \alpha_0 \, \pi(n+1)$$

Essa permette, partendo da $\pi(0)$, di calcolare iterativamente i successivi valori $\pi(1), \pi(2), \ldots$ in funzione dei precedenti, arrestando il calcolo quando si sia raggiunta l'approssimazione voluta a 1 della somma dei termini calcolati.

La quantità $\ell = \sum_k k \, \pi(k)$ rappresenta il valore atteso della lunghezza della coda a regime, e può benissimo essere infinita; si dimostra che essa è finita quando la distribuzione π possiede finito il momento del secondo ordine; detta V la varianza della distribuzione, si trova $\ell = m/2 + V/(2m-2)$.

Ma ho già abusato della pazienza del lettore, e chiudo qui l'argomento.

9. la legge dei grandi numeri

Il panorama abbozzato in queste note sarebbe troppo incompleto senza un cenno sia pur fugace a uno dei teoremi più importanti: quello che estende alle catene di Markov la legge dei grandi numeri, ben conosciuta nell'ambito delle variabili aleatorie indipendenti.

Consideriamo una catena di Markov e immaginiamo che, ogni qual volta essa visita lo stato x, si debba sopportare un "costo" $c(x) \geq 0$; nei primi n istanti, incorreremo in media nel costo per unità di tempo dato dalla variabile aleatoria

$$C_n = \frac{c(X_0) + c(X_1) + \cdots + c(X_{n-1})}{n} \tag{9.1}$$

È spontaneo chiedersi cosa accade di tale costo medio con il trascorrere del tempo, e ben si comprende l'interesse del teorema seguente.

(9.2) TEOREMA. *Se la catena è connessa e provvista di una distribuzione invariante di probabilità, i costi* C_n *tendono (qc) verso la quantità* $\sum_x c(x)\,\pi(x)$. *Nel linguaggio fiorito della meccanica statistica, si dice che le* medie temporali C_n *tendono alla* media in fase, *che sarebbe la media dei costi* $c(x)$ *pesati con la distribuzione* $\pi(x)$ *nello spazio degli stati.*

DIM. Supponiamo che la catena X_n parta dallo stato a; poichè a deve essere ricorrente (proposizioni 4.2, 4.3), la catena visita infinite volte lo stato a, all'istante iniziale $T_0 = 0$ e poi agli istanti $T_1, T_2, \dots$ (capitolo 3).

In virtù dell'assenza di memoria†, variabili aleatorie relative a cicli di ricorrenza distinti saranno indipendenti; ad esse potremo dunque applicare la legge dei grandi numeri classica.

Nel corso del k–esimo ciclo si incorre nel costo

$$U_k = \sum_{T_{k-1} \le j < T_k} c(X_j) \tag{9.3}$$

e le variabili aleatorie U_k $(k = 1, 2, \dots)$ sono indipendenti e hanno tutte la stessa legge; per l'usuale legge dei grandi numeri, le loro medie aritmetiche tendono dunque (qc) verso la comune speranza $E(U_k) = E(U_1)$.

Per la proposizione (7.3), lo stato ricorrente a è veloce, e la relativa distribuzione delle visite σ, descritta nel capitolo 6, ha somma finita. Si svolge allora il semplice calcolo seguente:

$$E(U_1) = E\Big(\sum_{0 \le j < T_1} c(X_j)\Big) = E\Big(\sum_{0 \le j < T_1} \sum_x c(x)\, I_{\{X_j = x\}}\Big) =$$

$$= \sum_x c(x)\, E\Big(\sum_{0 \le j < T_1} I_{\{X_j = x\}}\Big) = \sum_x c(x)\, \sigma(x) \tag{9.4}$$

e pertanto

$$\frac{U_1 + \cdots + U_k}{k} \to \sum_x c(x)\, \sigma(x) \quad (k \to \infty) \tag{9.5}$$

Scrivendo la (9.5) per la funzione $c(x) = 1$, si trova chiaramente

$$\frac{T_k}{k} \to \sum_x \sigma(x) \tag{9.6}$$

† vedi però la nota a pag 4

da cui, dividendo membro a membro e tenendo conto della (6.5), si trae

$$C_{T_k} = \frac{U_1 + \cdots + U_k}{T_k} \to \sum_x c(x)\,\pi(x) \quad (k \to \infty) \tag{9.7}$$

Qui il lettore di bocca buona potrebbe anche abbandonare la dimostrazione. In realtà, nella definizione (9.1) dei costi medi, l'istante corrente n non coincide esattamente con il termine di un ciclo; per completare correttamente la dimostrazione, occorre dunque ancora un po' di pazienza.

Si tratta di introdurre la variabile

$$N_n = I_{\{X_0=a\}} + \cdots + I_{\{X_{n-1}=a\}}$$

cioè il numero di visite della catena nello stato a nei primi n istanti, notare che N_n tende (qc) all'infinito per la ricorrenza e pertanto dalla (9.5) segue

$$\frac{U_1 + \cdots + U_{N_n}}{N_n} \to \sum_x c(x)\,\sigma(x) \quad (n \to \infty) \tag{9.5 bis}$$

Scrivendola per $c \equiv 1$ e dividendo membro a membro come si è fatto sopra,

$$\frac{U_1 + \cdots + U_{N_n}}{n} \to \sum_x c(x)\,\pi(x) \quad (n \to \infty) \tag{9.7 bis}$$

Lascio al lettore esperto la verifica della doppia disuguaglianza

$$\frac{U_1 + \cdots U_{N_n - 1}}{n} \le C_n \le \frac{U_1 + \cdots U_{N_n}}{n}$$

e l'onere di completare i dettagli della prova. ♢

Mi limito a sottolineare un caso particolare del teorema, che si ha quando si prenda per funzione costo la funzione indicatrice di uno stato; le medie temporali (che sono ora le frequenze di visita nello stato fissato) tendono verso la media in fase (che è il valore della distribuzione invariante in quello stato).

Se ne desume un'interessante interpretazione del significato intuitivo della distribuzione invariante, che si affianca a quella offerta dalla tendenza alla stazionarietà (capitolo 5) e a quella della conclusione del capitolo 7.

10. appendice

Scopo di quest'appendice è quello di colmare le lacune rimaste in alcune dimostrazioni. La lettura dell'appendice si deve considerare del tutto facoltativa, e riservata a un pubblico esperto.

10.1 la forma forte dell'assenza di memoria

In svariate occasioni ho preteso di utilizzare l'assenza di memoria, formulata nell'ultima frase del capitolo 1 a commento della (1.3), in situazioni nelle quali l'istante studiato non era fisso, bensì aleatorio; da questo, che parrebbe un arbitrio ingiustificato, ho puntualmente messo in guardia nelle note.

È tempo di sistemare la questione. Si tratta di riconoscere che la formulazione (1.3) vale quando in luogo dell'istante n compaia un tempo aleatorio T, a prezzo di due condizioni:

a) per ogni intero positivo n, l'evento $\{T = n\}$ sia anteriore a n, cioè funzione di $X_0, X_1, \ldots, X_n$ (i matematici dicono: T è un *tempo d'arresto*);

b) l'evento A sia *anteriore a* T: con siffatta locuzione, lievemente ermetica, intendo che, per ogni intero positivo n, l'evento $A \cap \{T = n\}$ è anteriore a n.

In queste ipotesi, la (1.3) permette di scrivere

$$P(A, T = n, X_T = x_0, X_{T+1} = x_1, \ldots, X_{T+k} = x_k) =$$

$$P(A, T = n, X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \ldots, X_{n+k} = x_k) =$$

$$= P(A, T = n, X_n = x_0)\, \mathrm{P}(x_0, x_1)\, \ldots \mathrm{P}(x_{k-1}, x_k) =$$

$$= P(A, T = n, X_T = x_0)\, \mathrm{P}(x_0, x_1)\, \ldots \mathrm{P}(x_{k-1}, x_k)$$

e basta poi sommare per tutti i valori di n per ottenere appunto

$$P(A, X_T = x_0, X_{T+1} = x_1, \ldots, X_{T+k} = x_k) =$$

$$= P(A, X_T = x_0)\, \mathrm{P}(x_0, x_1)\, \ldots \mathrm{P}(x_{k-1}, x_k)$$

ed enunciare la *forma forte* dell'assenza di memoria:

una volta che la catena si trovi nello stato x_0 al tempo d'arresto T e condizionalmente a un arbitrario evento passato, essa si muove a decorrere dall'istante T come se partisse di bel nuovo da x_0 e nulla fosse prima accaduto.

Il lettore darà atto che le circostanze a) e b) ricorrevano quando nelle pagine precedenti mi sono avvalso dell'assenza di memoria per istanti aleatori.

Mi riferisco qui alla nota di pag 7. Usiamo i simboli del capitolo 4, in particolare poniamo $\mu_n(x) = P(X_n = x)$.

Dato $\varepsilon > 0$, esiste un insieme finito F tale che $\sum_{y \notin F} \pi(y) < \varepsilon/4$; usando l'identità $|a - b| = a + b - 2\, a \wedge b$ (dove $a \wedge b$ indica come al solito il minimo tra a e b), otteniamo

$$\sum_y |\mu_n(y) - \pi(y)| = \sum_y \mu_n(y) + \sum_y \pi(y) - 2 \sum_y \pi(y) \wedge \mu_n(y) =$$

$$= 2 \sum_y \big(\pi(y) - \pi(y) \wedge \mu_n(y)\big) \leq 2 \sum_{y \in F} \big(\pi(y) - \pi(y) \wedge \mu_n(y)\big) + 2 \sum_{y \notin F} \pi(y) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{y \in F} \big(\pi(y) - \pi(y) \wedge \mu_n(y)\big) + \varepsilon/2$$

Tenendo ora conto della (4.1), si ha

$$\Big| \mu_{n+1}(x) - \sum_y \pi(y) \mathrm{P}(y, x) \Big| = \Big| \sum_y \big(\mu_n(y) - \pi(y)\big) \mathrm{P}(y, x) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_y \big|\mu_n(y) - \pi(y)\big| \leq 2 \sum_{y \in F} \big(\pi(y) - \pi(y) \wedge \mu_n(y)\big) + \varepsilon/2$$

Supponiamo ora che $\mu_n(y)$ tenda a $\pi(y)$ per ogni y; anche $\pi(y) \wedge \mu_n(y)$ tende di conseguenza a $\pi(y)$ per ogni y; detto K il numero di elementi dell'insieme finito F, da un certo indice n in poi avremo

$$\big|\mu_n(y) - \pi(y)\big| < \varepsilon/(4K)$$

per ogni $y \in F$; da cui

$$\Big| \mu_{n+1}(x) - \sum_y \pi(y) \mathrm{P}(y, x) \Big| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

da un certo indice n in poi.

Riassumendo, abbiamo provato che $\mu_{n+1}(x)$ tende a $\sum_y \pi(y) \mathrm{P}(y, x)$; ma d'altra parte, tende anche verso $\pi(x)$ per ipotesi, e resta dimostrata la voluta relazione d'invarianza $\pi(x) = \sum_y \pi(y) \mathrm{P}(y, x)$. $\diamondsuit$

10.3 LA DISTRIBUZIONE DELLE VISITE È PUNTUALMENTE FINITA

Torniamo alla nota di pag 13; sia σ la distribuzione delle visite relativa allo stato ricorrente r (ora non necessariamente veloce), e facciamo vedere che $\sigma(x)$ è finita per ogni x.

La cosa è ovvia se x non è accessibile da r, nel qual caso non si può visitare x partendo da r, e $\sigma(x)$ è addirittura zero.

Fatta salva la possibilità di avere ora $\sigma(x) = \infty$, la dimostrazione del teorema di invarianza (6.6) resta però, come si è detto, valida.

Sussiste cioè la relazione

$$\sigma(a) = \sum_x \sigma(x)\, \mathrm{P}(x, a)$$

Essa mostra che se σ ha valore finito in uno stato a, ha necessariamente valore finito in ogni stato x per il quale sia $\mathrm{P}(x, a) > 0$; dato che $\sigma(r) = 1$, un ragionamento iterativo simile a quello usato a suo tempo per dimostrare la proposizione (4.2) prova che $\sigma(x)$ è finito in ogni x dal quale r sia accessibile.

Ma se x è accessibile da r, anche r è accessibile da x, per la "parte facile" (a) del teorema (3.1). La dimostrazione è così completa. $\diamondsuit$