Imre Toth

# Le sorgenti speculative dell'irrazionale matematico nei dialoghi di Platone

a cura di
Romano Romani e Paolo Pagli



Edizioni ETS

www.edizioniets.com



EDIZIONI ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

*Distribuzione*
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

*Promozione*
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884675219-2
ISSN 2420-9198

# PREFAZIONE

*Romano Romani*

Αὐτὰρ ἐπειδὴ πάντα φάος καὶ νὺξ ὀνόμασται
καὶ τὰ κατὰ σφετέρας δυνάμεις ἐπὶ τοῖσί τε καὶ τοῖς,
πᾶν πλέον ἐστὶν ὁμοῦ φάεος καὶ νυκτὸς ἀφάντου
ἴσων ἀμφοτέρων, ἐπεὶ οὐδετέρωι μέτα μηδέν.

Ma poiché tutti gli enti si chiamano giorno e notte,
secondo il potere dell'uno o dell'altra su questi e questi altri,
tutto è ugualmente pieno di luce e di buio che ne è la privazione,
di ambedue in ugual misura, e a nessuno dei due si accompagna il nulla.

(Parmenide, frammento 9 DK)

L'apparire
dell'infinito
nel finito
è la giusta misura
– τὸ μέτριον –
e il silenzio.

Irrazionale
è il numero
che esprime
questa misura
forma
di quel silenzio:

infinito in atto,
luce dal buio,
ἁρμονίη ἀφανής,
bellezza
del vivere
nella tragicità
dell'esistere,

sapere
di non sapere.

I

La matematica, che è parte del λόγος – gli appartiene –, non può e non potrebbe essere estranea al problema dell'essere, se il problema dell'essere è problema del λόγος – del pensiero che è parola, della parola che è pensiero.

Potrei anche dire, con una larga approssimazione, che il progetto di un libro sulle sorgenti dell'irrazionale matematico nei dialoghi di Platone abbia avuto inizio nel maggio del 2001, quando Imre Toth fece una lezione all'università di Siena, nell'ambito del mio corso su la *Repubblica*, commentando il passo *Rsp* 534d.

Ma non ricordo esattamente il giorno nel quale gli dissi, ascoltato, che poiché egli soltanto poteva scrivere questo libro, doveva farlo. Lo traduco io, aggiunsi. E tanto meno ricordo quando mi disse che si sarebbe messo alacremente al lavoro.

Ma così avvenne: che non soltanto lo avessi invitato a scrivere il libro, ma anche che continuassi a chiedergli a che punto fosse quella scrittura.

Di questo mio interesse, di questa cura, Imre mi era grato.

Nel gennaio 2009, durante un convegno su Zenone di Elea, svoltosi ad Ascea Marina, vicino a Velia, Flavia Marcacci, giovane studiosa di filosofia della matematica, docente incaricata di questa disciplina nella facoltà di filosofia della Pontificia Università Lateranense, chiese a Imre Toth di redigere la voce *irrazionale matematico* per una enciclopedia della scienza nel mondo antico.

Era l'occasione per scrivere una sintesi del lavoro sull'irrazionale matematico in Platone cui Toth si stava dedicando da alcuni anni. Nel marzo di quello stesso 2009 il testo della voce per l'enciclopedia, scritto in francese, era pronto. Ma non fu accettato dalla redazione del dizionario enciclopedico che ormai era in tipografia. L'impostazione filosofica del lavoro di Toth era uno degli ostacoli, ma, oltre a questo, il tempo necessario alla traduzione, che era resa ardua dai contenuti tecnici del testo, non consentiva di conciliare le scadenze previste per l'uscita dell'enciclopedia, con l'inserimento di quella voce.

Toth cominciò, dopo il rifiuto, a rielaborare ed ampliare il suo scritto per renderlo il più possibile una sintesi compiuta del libro che andava componendo da anni. In questo credo che lo abbia incoraggiato il fatto che io stesso avessi iniziato la traduzione del lavoro, ma penso che egli sentisse pure di non avere forse il tempo di compiere l'opera grande in tutta la sua estensione.

Furono infatti, i primi mesi del 2009, un periodo molto difficile. Il 28 febbraio morì Corrado Mangione, il grande logico italiano studioso di Frege e amico intimo di Imre. Questa morte lo colpì duramente: "Non mi sono mai abituato all'idea", mi disse un giorno, "della morte, e ogni volta che manca una persona cara, un amico, trovo questo inaccettabile". Poi si seppe che si stava preparando un convegno a Milano per ricordare e onorare la figura di Corrado Mangione, e Imre si concentrò nella rielaborazione della sintesi del suo libro per partecipare al ricordo con il suo scritto. Ma non voleva andare personalmente al convegno, mi disse che non era sicuro di reggere all'emozione di quella prova, la morte dell'amico lo aveva colpito troppo profondamente.

Stava terminando, d'altro lato, proprio in quel periodo, la rilettura del suo capolavoro, al quale aveva atteso per tutta la vita, che sarebbe uscito presso De Gruyter con il titolo *Fragmente und Spuren nichteuklidischer Geometrie bei Aristoteles*, nell'estate 2010: troppo tardi perché egli potesse vederlo pubblicato.

Nel giugno 2009 Imre mi chiese di scrivere una prefazione al libro, che sarebbe stato pubblicato nell'autunno di quell'anno in Francia: *Libert*é *et Vérité.*

Il libro è composto di due suoi saggi, uno dei quali era stato tradotto da me in italiano, per Bollati Boringhieri, due anni prima, con il titolo: *La filosofia e il suo luogo nello spazio della spiritualità occidentale.* Il tempo disponibile per scrivere quella prefazione era troppo esiguo, per me, e fui costretto a rifiutare. «La scrivo io», mi disse, ma non lo fece, e il libro è stato pubblicato senza prefazione.

Imre si preoccupava di mettere in ordine nel modo migliore e nel più breve tempo possibile i lavori ai quali teneva particolarmente. Come tutti coloro che hanno a che fare con la riflessione filosofica, era lento nella scrittura e dichiarava sempre di non avere fretta. Tuttavia sentiva drammaticamente le scadenze, era in lotta con esse. Penso che a questo sia dovuta anche la forma del tutto ordinata di alcune parti del libro incompiuto: la dedica, la premessa, l'introduzione, alcune pagine conclusive. Sono come righe di un testamento spirituale che egli intendeva salvare dalle intemperie del tempo cui tutti siamo esposti e cui sempre più probabilmente possiamo soggiacere con il passare degli anni e l'avanzare dell'età.

## II

La teoria della diade infinita e l'uno è riportata da Aristotele nella *Metafisica* come insegnamento non scritto di Platone. Ma Toth, interpretando questo insegnamento nei termini di una teoria del numero irrazionale, ne cerca le tracce nei dialoghi. Non tanto insegnamento non scritto, dunque, quanto teoria assolutamente nuova, sconvolgente al punto da restare, per lunghi secoli, prima rifiutata, poi ignorata. La eco che se ne trova in Aristotele è, al tempo medesimo, illuminante e deviante, almeno nei passi che la riportano.

Illuminante perché Aristotele ne offre una esposizione articolata e apparentemente ben comprensibile: deviante perché il discorso sembra risolversi in questi resoconti, per dettagliati e ben articolati che siano.

Lo spostamento di senso prodotto dall'interpretazione e dalla ricerca di Toth, che coinvolge passi cruciali e molteplici dei dialoghi platonici, induce a una nuova riflessione anche sull'opera aristotelica nei suoi rapporti più generali e profondi con quella di Platone. Poiché, anche se Aristotele ha negato nella *Fisica* la concepibilità di un infinito in atto, la teoria aristotelica del rapporto tra atto e potenza ci appare in un'altra luce, se si considerano alcuni passi dei dialoghi platonici nei quali Toth trova che a muovere la riflessione sul problema è il nodo geometrico del rapporto tra commensurabile e incommensurabile.

Non mi sembra giustificato percorrere qui nuovamente la strada già percorsa nella prefazione all'edizione francese del 2011. Penso invece che, a questo punto, si debba lasciare il lettore di fronte alla nuda ipotesi dell'autore, al suo modo di svolgere l'argomento.

Una sola notazione: il rapporto tra commensurabile e incommensurabile è lo stesso che quello tra finito e infinito, limite e illimitato. Su questo rapporto la speculazione filosofica occidentale si è soffermata sin dalle sue origini con studi e ricerche, per così dire, trasversali, che toccano certamente la matematica, ma anche la filosofia trascendentale; la teoretica, ma anche l'estetica; la fisica, ma anche la cosiddetta metafisica.

Il contributo di Toth, quindi, è filosofico in un senso molto ampio e va letto dentro una tradizione di pensiero che considera ogni passo avanti come un risultato certo e tuttavia mai del tutto acquisito, compiuto e tuttavia a disposizione di chi voglia o possa cercarvi e trovarvi un altro possibile compimento o un altro possibile inizio.

## III

La morte improvvisa di Imre Toth ha interrotto per almeno un anno il lavoro di traduzione che avevo iniziato nel 2009 sui primi file che l'autore mi inviava. L'ultimo, che aveva inviato per la pubblicazione nel volume per Corrado Mangione, nel maggio 2010, non lo ricevetti: aveva promesso di mandarmelo, appena due giorni prima di morire.

Ottenni dai curatori del libro in onore di Corrado Mangione[1], che il testo che avevano ricevuto da Toth fosse pubblicato come si trovava, anche se avrebbe avuto bisogno della correzione delle bozze da parte dell'autore che non c'era più. La prima edizione del testo francese, dunque, risale al marzo 2011. Quella francese de L'Éclat, a cura di Michel Valensi e con una mia prefazione, è stata pubblicata nell'ottobre dello stesso anno[2].

La famiglia Toth mi ha autorizzato a tradurre in italiano la sintesi del libro postumo e il libro postumo stesso. Giovanni Reale, cui avevo inviato le pubblicazioni della sintesi e il file del libro postumo incompiuto, mi aveva chiesto la stessa cosa, promettendomi di pubblicare l'opera nella sua collana *Il Pensiero Occidentale*.

Per affrontare un lavoro tanto arduo, anche tecnicamente, ho chiesto aiuto al mio amico matematico Paolo Pagli: così ho ripreso la traduzione del testo già pubblicato in francese.

Dopo la mia prima stesura, che ha costituito la trama letteraria omogenea del lavoro, Paolo Pagli è intervenuto con acribia nei punti nei quali il testo richiedeva il possesso di una competenza matematica e un linguaggio adeguato a tale competenza. Ma, a questo punto, si deve dire che la collaborazione è divenuta così estesa su ogni minimo particolare che, nel bene e nel male, di questo lavoro siamo divenuti responsabili entrambi in ugual misura.

Una attenta considerazione dello stato dei materiali del libro rimasto incompiuto, mi ha fatto decidere, dopo un inizio di traduzione al quale ha lavorato Paolo Pagli, per una soluzione diversa: pubblicare i materiali stessi come documento. Ne parlai al telefono nell'ottobre del 2014, una settimana prima che mancasse, con Giovanni Reale. Gli pro-

[1] IMRE TOTH, *Platon: la dyade infinie et l'Un – fondement logique et ontologique du nombre irrationnel*, in *La ricerca logica in Italia. Studi in onore di Corrado Mangione*, a cura di Edoardo Ballo e Carlo Cellucci, Cisalpino, Istituto Editoriale Universitario, Milano 2011, pp. 67-127.

[2] IMRE TOTH, *Platon et l'irrationnel mathematique*, Éditions de l'Éclat, Paris 2011.

posi di mettere quello scritto, come una anastatica, in appendice alla sintesi, per lasciarlo a disposizione degli studiosi. Egli si disse d'accordo.

Tutto questo, dopo, in mancanza di quel fondatore e direttore di collana, è divenuto non più di una favola da narrare.

Per tornare alla sintesi, questa traduzione si attiene al testo delle pubblicazioni italiana e francese richiamate sopra e citate in nota. Potrà tuttavia trovarsi qualche lievissima difformità prodotta dal mio aver lavorato su file inviatimi precedentemente all'ultimo. Ma quando questo sia dato, abbiamo lasciato la versione precedente perché ci è sembrata identica, nel senso, a quella successiva e più chiara nella nostra lingua.

Si è compiuto un accurato lavoro di controllo di tutte le citazioni e dei rinvii ai passi da cui sono prese. Si è controllata anche l'esattezza di tutti i segni e le espressioni matematiche.

Ci è sembrato di aver rispettato in tutto la lettera e lo spirito del testo originale e di averlo reso in un buon italiano. L'opera tradotta è di grande difficoltà e la tesi che essa sostiene è molto ardua. Affidiamo, come è giusto, questa voce al futuro.

Come ultima annotazione, rispettando quanto l'autore dice al termine del libro incompiuto, rinvio al libro, dello stesso Imre Toth, dal titolo: *I Paradossi di Zenone nel Parmenide di Platone*, traduzione italiana di Antonio Moretto, L'officina tipografica, Napoli 1994. Il volume è stato ristampato in anastatica dall'editore Bibliopolis, a Napoli, nell'anno 2007. Nel progetto iniziale del libro sull'irrazionale matematico in Platone, Toth pensava al volume sui *Paradossi di Zenone nel Parmenide di Platone*, come all'ultimo capitolo dell'opera. Ma quando Bibliopolis gli chiese l'autorizzazione alla ristampa anastatica del volume, mi sembrò che questo progetto venisse meno nel suo animo, forse perché pensava che quel libro Egli non lo avrebbe mai portato a termine.

Una testimonianza della ricerca di Imre Toth sul problema dell'irrazionale matematico nei testi della filosofia classica, platonica e preplatonica, si trova in molti suoi scritti, ma in nessuno completa come in questo che abbiamo tradotto e nel documento del libro incompiuto. Una prefigurazione de *I paradossi di Zenone nel Parmenide di Platone*, nella loro relazione con il problema dell'origine del numero irrazionale nel pensiero di Platone, è già contenuta nel denso saggio, pubblicato nel 1991, dal titolo: *LE PROBLÈME DE LA MESURE DANS LA PERSPECTIVE DE L'ÊTRE ET DU NON-ÊTRE. Zénon et Platon, Eudoxe et Dedekind: une généalogie philosophico-mathématique* (*IL PROBLEMA DELLA MISURA NELLA PROSPETTIVA DELL'ESSERE E DEL NON-ESSERE. Zenone e Platone, Eudosso e Dedekind: una genealogia filosofico-matematica*), in

*MATHÉMATIQUE ET PHILOSOPHIE DE L'ANTIQUITÉ À L'ÂGE CLASSIQUE*, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1991, da pagina 21 a pagina 99.

Il titolo *Le sorgenti speculative dell'irrazionale matematico nei dialoghi di Platone* fu dato da Imre Toth a questa sintesi, pensando alla traduzione che ne stavo facendo.

# INTRODUZIONE

*Paolo Pagli*

## *Platone e l'incommensurabilità: una proposta audace*

L'appassionata attività di ricerca di Imre Toth (1921-2010), insieme storica e teoretica, si è svolta lungo l'intero arco di una biografia che ha toccato più volte la tragedia. Tra i vari temi, essa ha mantenuto due linee di indagine privilegiate ed ininterrotte nel campo della storia della matematica e del pensiero. In ambedue i casi con proposte rivoluzionarie rispetto alle ipotesi consolidate.

La prima, la più nota anche in Italia, ritiene di rinvenire in Aristotele una lucida consapevolezza della possibilità di geometrie "non euclidee" prima della sistemazione di Euclide. Esistono in italiano alcuni decisivi contributi di Toth sul tema; la sintesi finale della ricerca è uscita postuma in tedesco[1].

L'altra linea di indagine attribuisce a Platone una intuizione dei numeri nuovi "necessari" in relazione al problema della incommensurabilità di segmenti di retta, cioè individua in Platone una proposta di costruzione di quelli che noi chiamiamo *numeri reali*. Come è noto, ad una definizione rigorosa dei reali si è pervenuti solo alla metà del XIX secolo: la novità quindi risulta folgorante. Al momento della scomparsa, Toth non aveva completato la stesura definitiva delle sue proposte e riflessioni sull'argomento, ma qualche anno prima, su sollecitazione di amici, si era convinto a anticiparne una sintesi con il breve e denso testo che qui viene tradotto.

Toth era ben consapevole del carattere rivoluzionario della sua ricostruzione e interpretazione del ruolo dell'irrazionale matematico nel pensiero di Platone, e, come nel caso precedente, anche qui fonda la sua ermeneutica su un continuo, puntiglioso, sostegno di citazioni delle fonti.

[1] IMRE TOTH, *Fragmente und Spuren nichteuklidischer Geometrie bei Aristoteles*, de Gruyter, Berlin 2010, pp. 425.

Per un più efficace inquadramento e una valutazione della sua proposta nella storia della matematica, ritengo utile premettere una rapida esposizione teorica del problema che si aprì nella matematica greca con la dimostrazione dell'esistenza di coppie di segmenti incommensurabili e della sua "soluzione", cioè la definizione rigorosa dei numeri reali, circa 2300 anni dopo. La svolgerò nell'ottica e nel linguaggio della matematica odierna, assumendo, come d'altronde fa Imre Toth, che la rilettura e la narrazione dei fatti matematici con il punto di vista e la consapevolezza emersi nel seguito, non siano una deformazione della storia, ma un indispensabile criterio e strumento di chiarezza.

Naturalmente lo scritto di Toth contiene molto altro, innestato in una linea di intensa riflessione filosofica: il problema del passaggio dal non essere all'essere, nel campo, privilegiato per la semplicità, degli enti matematici, la libertà del soggetto individuale… le questioni di sempre dell'autore. Tuttavia, con un consapevole e inevitabile tradimento di questa ricchezza e complessità concettuale, nell'introduzione presente tutte queste tematiche saranno omesse per mettere a fuoco unicamente il problema matematico di fondo e la sua odierna soluzione. Una premessa teorica indispensabile, ritengo, per valutare l'"audacia" della proposta di Toth.

*Nel seguito N, Z, Q e R indicheranno, come di consueto, i numeri naturali, i numeri interi, i numeri razionali e i numeri reali.*

## *Venture e sventure dei numeri irrazionali*

### 1. *Coppie di segmenti incommensurabili*

*Due segmenti AB, CD, si dicono incommensurabili se non esiste alcun sottomultiplo dell'uno che sia contenuto un numero intero di volte nell'altro.*

Il termine "incommensurabili" ricalca esattamente il greco ἀσύμμετρα: "non reciprocamente misurabili", e la denominazione al negativo segnala che il caso opposto, cioè che i due segmenti siano "commensurabili", è quello che risulta più naturale fino a che una dimostrazione non impone di accettare un diverso punto di vista. Poiché, dietro la semplicità apparente, la definizione individua e presuppone un evento assolutamente non intuitivo e imprevedibile: ma esistono coppie di segmenti in quella situazione? Ovviamente sì, nel senso che anteriormente c'è stata la scoperta, e la definizione/denominazione è venuta dopo. Ma come possono essere due segmenti (diversi, perché se uguali la loro misura reciproca è 1) così "inconfrontabili" quanto all'estensione da non possedere un sottomultiplo comune? Con una tale, sottile, diversità che non è possibile esaurire l'uno tramite l'altro o sue parti aliquote? Si immaginano situazioni geometriche molto particolari e complicate. Oggi tutti sappiamo che non è così[2]. Valgono, tra altri, i risultati:

*In un triangolo equilatero il lato e l'altezza sono incommensurabili.*
*In un quadrato il lato e la diagonale sono incommensurabili.*
*In un pentagono regolare il lato e la diagonale sono incommensurabili.*

Quindi la presenza di coppie di segmenti incommensurabili emerge già in contesti di massima semplicità, simmetria e regolarità. Oltre a sorprenderci da un punto di vista intuitivo, l'evento ha conseguenze epocali. I risultati precedenti comportano, da un lato, il fatto che è impossibile, assunto un qualunque segmento come unità di misura, assegnare una misura razionale a ogni segmento, cioè segnalano l'insufficienza dei numeri razionali per valutare l'estensione di segmenti; dall'altro negano l'esistenza di un "quantum geometrico", un segmento minimo che costituisca tutti gli altri. Se ciò fosse, infatti, tutti i segmenti dovrebbero risultare multipli di questo "quantum", cioè sarebbero tra loro commensurabili. La tensione motiverà il "punto" impalpabile di Euclide, "privo di parti" e cioè indivisibile nel senso di privo di estensione: una delle metafore scientifiche più antiche e singolari dell'Occidente, che ha forgiato un preciso e duraturo immaginario.

Occorre notare infine che il fenomeno della incommensurabilità non è come altri risultati, cioè altri teoremi geometrici, una proprietà "positiva" di certi tipi di enti (così, ad esempio, il teorema di Pitagora): afferma il sussistere di una impossibilità, e questo non si può vedere (né accettare) tramite una costruzione euristica, ma solo con una argomentazione del tutto rigorosa, cogente. Esige una *dimostrazione*, e quindi presuppone l'esistenza, la familiarità e la consapevolezza di questo procedimento, che, come sappiamo, è il fondamento e l'essenza della matematica greca. La scoperta dell'incommensurabile, successivo "frutto", grandioso, di questo procedimento, caratterizza e caratterizzerà la qualità astratta della ricerca geometrica ellenica e inaugura la serie di risultati "limitativi", quasi sempre contro le aspettative, che costellano, non frequenti ma in genere fondamentali, la storia della nostra matematica.

[2] Il fenomeno dell'incommensurabilità si incontra nella scuola dell'obbligo, nel primo biennio delle superiori. Ma in quel momento non ne viene compresa l'importanza. Torneremo più avanti sulla questione.

# INDICE

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com
Finito di stampare nel mese di novembre 2018