Paolo Manca

Il giallo del teorema dei quattro colori

vai alla scheda del libro su www.edizioniets.com

Edizioni ETS

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884675269-7

I lettori che desiderano contattare l'autore possono scrivere a info@edizioniets.com

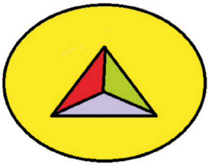
Indice

Presentazione

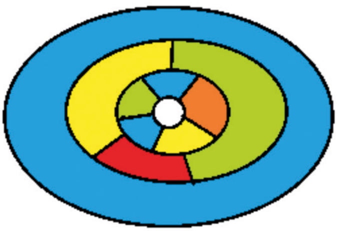
La speculazione matematica si addice a chi non ha pensieri o a chi ha troppi spiacevoli pensieri: la matematica riempie la testa di pensieri a chi non ne ha, e scaccia i troppi spiacevoli pensieri a chi li ha.
Si aggiunga che chi si dedica a speculazioni matematiche ha poco tempo per occuparsi di politica, economia, filosofia, dunque i cultori della matematica difficilmente nuociono alla società e vanno incoraggiati.

Queste pagine sono dedicate a chi voglia procurarsi molti pensieri affrontando un rompicapo che riguarda la colorazione, col minor numero possibile di colori, di una carta geografica in modo che regioni confinanti non abbiano lo stesso colore.
Come in altri casi un enunciato di immediata intuitiva comprensione nasconde difficoltà di trattazione quasi insormontabili.

Vi sono carte geografiche (mappe) che per essere colorate necessitano di quattro colori come ad esempio la semplice mappa seguente:



e d’altra parte non è stato difficile dimostrare che cinque colori sono comunque sufficienti.
Per questo risulta abbastanza ragionevole chiedersi: se quattro colori sono necessari e cinque colori sono sufficienti, qual è il numero minimo di colori *necessario e sufficiente* per colorare una qualunque mappa?
Con altra formulazione equivalente: esiste almeno una carta che non può essere colorata con quattro colori e necessita di cinque colori per essere colorata?
Per esempio la mappa che segue è 4-colorabile o necessita di almeno cinque colori?



Una persona normale risponderebbe che, con tutti i colori disponibili, bisogna essere folli per porsi un tale quesito e che in ogni caso, poiché cinque colori sono sufficienti, non si capisce perché ci si debba rovinare la vita e finire alla neurodeliri per dimostrare che bastano solo quattro colori.
Ma per un matematico questa irrilevante precisazione è più importante della scoperta della pietra filosofale, è come per la ricerca del Graal: merita una vita di impegno indefesso.
Dal 1852, quando un botanico formulò il quesito, per oltre un secolo, generazioni di matematici, dilettanti e professionisti, si sono complicati l’esistenza per dimostrare che quattro colori erano sufficienti.
Molti tentativi, diversi errori e infine, nel 1976, una risposta affermativa ma ottenuta con l’ausilio imprescindibile di un computer e tale da essere in pratica non verificabile.

Nelle pagine che seguono vogliamo illustrare questa futile vicenda a beneficio di coloro che nascono e vivono cercando di soddisfare inutili curiosità.
La presentazione e la comprensione degli argomenti trattati non richiede conoscenze di "matematica seria" (algebra, geometria, calcolo differenziale …): bastano poche nozioni di geometria elementare e il gusto della speculazione.
Ed è proprio da questa semplicità di formulazione e dall'utilizzo di strumenti matematici molto elementari che nasce il fascino, per chi lo sente, del quesito dei quattro colori: ma possibile che tanti illustri cervelli da oltre un secolo abbiano prodotto risultati così poco soddisfacenti?
E se qualche attento lettore trovasse qualcosa che nessuno ha mai trovato?

Il libro si articola in due capitoli.
Nel primo capitolo vengono presentate alcune elementari nozioni di teoria dei grafi e le principali caratteristiche dei grafi planari alfine di poter formulare il problema dei quattro colori con un linguaggio rigoroso.
Il capitolo secondo tratta del problema delle colorazioni di un grafo planare e presenta le linee su cui è stata impostata e sviluppata l'attuale dimostrazione del teorema dei quattro colori raggiunta nel 1976 da Appel e Haken.
Alla luce del lavoro di Appel e Haken si affronta una questione, oggi quanto mai dibattuta, su cosa debba intendersi per dimostrazione e se la disponibilità di enorme potenza di calcolo dei computer debba modificare il nostro modo di produrre dimostrazioni.
Nell'esposizione gli argomenti vengono trattati privilegiando la comprensibilità ma senza sacrificare i contenuti e utilizzando quasi esclusivamente nozioni di geometria e algebra elementare, nel rispetto di quanto afferma Albert Einstein: "tutto dovrebbe essere reso il più semplice possibile, ma non più semplice ancora".

Capitolo I

Sintesi: *Dopo aver esposto la storia che ha condotto dalla formulazione nel 1852 del quesito dei quattro colori alla sua soluzione nel 1976, si introducono alcuni semplici concetti riguardanti i grafi (insiemi di vertici e spigoli) e si presentano le proprietà che consentono ad alcuni grafi di poter essere disegnati nel piano in modo che gli spigoli si incontrino solo in corrispondenza dei vertici (grafi planari).*
Il capitolo termina con la formula di Eulero che lega tra loro il numero dei vertici e degli spigoli e delle facce sia di un poliedro che di un grafo planare: il numero dei vertici sommato al numero degli spigoli è uguale al numero delle facce più due. Praticamente tutto ciò che serve per affrontare il problema dei colori si fonda su tale semplice elegante potente formula.

1.1. *La storia*[1]

Francis Guthrie chi era costui?
Come Carneade deve anch'egli la sua fama imperitura ad una citazione.

[1] Per maggiori dettagli si veda: Biggs, N., Lloyd, E. Wilson, R. (1986) (1998) - *Graph Theory.* Oxford. Oxford University Press.

Come recita Wikipedia[2]: **Francis Guthrie** (1831-1899) era un botanico a cui sono state anche dedicate alcune specie botaniche[3] e che studiò matematica con un insigne maestro: Augustus De Morgan (1806-1871).
Correva l'anno 1852: Guthrie, mentre tentava di colorare una carta geografica dell'Inghilterra, verificò la necessità di dover adoperare almeno quattro colori affinché regioni confinanti avessero colore differente e congetturò che quattro colori potessero bastare.
Poteva starsene tranquillo ma volle comunicare questa sua congettura al fratello matematico Frederick che a sua volta la propose al professore Augustus De Morgan il quale, invece di starsene a sua volta zitto, la diffuse tra i matematici dell'epoca e in particolare la comunicò per lettera ad un altro grande matematico William Rowan Hamilton (1805-1865)[4].
Il quesito, di immediata comprensione e di apparente estrema semplicità, trovò udienza presso la comunità dei matematici ma nessuno seppe dare adeguata risposta; tant'è che nel 1878 un altro importante matematico Arthur Cayley, in un incontro alla LondonMathematical Society espose la congettura chiedendosi se qualcuno avesse trovato risultati in merito.
Un anno dopo, nel 1879, sull'American Journal of Mathematics, comparve una dimostrazione ad opera di Alfred Bray Kempe (1849-1922) che per quarant'anni ancora continuò ad occuparsi del problema dei 4 colori[5].
Kempe, sfruttando un risultato affascinante per la sua eleganza e semplicità, la bellissima formula di Eulero relativa

[2] Wikipedia una grande iniziativa che dovremmo tutti sostenere.

[3] Ad esempio: erica guthriei.

[4] Hamilton, quello dei cicli hamiltoniani: cammini chiusi che passano per tutti i vertici di un poliedro toccando ogni vertice una volta sola. Ricordiamo che un cammino su dice invece euleriano se passa per tutti gli spigoli attraversando ogni spigolo una volta sola.

[5] A.B. Kempe, *On the geographical problem of the four colors*, Amer. J. Math. **2** (1879).

ai poliedri[6], mostrò, per induzione, che era sempre possibile colorare una mappa planare con 4 colori.
L'umanità tirò un sospiro di sollievo e i matematici si dedicarono ad altre fantasiose ricerche.
Undici anni più tardi, nel 1890, John Percy Heawood (1861-1955) trovò una falla nella dimostrazione di Kempe, e, proprio usando le considerazioni di Kempe, dimostrò che cinque colori erano sufficienti[7].
Dunque quattro colori necessari, cinque sufficienti: chiunque si sarebbe fermato.
E invece fu proprio questo risultato che suonò come un guanto di sfida: ma infine quattro o cinque?

Seguire a questo punto la storia dei tentativi e dei risultati ottenuti, sia pur parziali, diventa praticamente impossibile. È tuttavia opportuno sottolineare come la semplicità del quesito e degli strumenti matematici utilizzati abbiano sorprendentemente spiazzato e tenuto in scacco le migliori menti matematiche.
Segnaliamo soltanto i contributi più salienti emersi in anni di intense ricerche di molti intrepidi studiosi.
Tra le mille strade intraprese si cercarono formulazioni equivalenti del problema e si scoprì che l'ipotesi dei 4 colori era equivalente a numerose altre ipotesi anche in campi della matematica assolutamente diversi[8] ma egualmente ostici da affrontarsi.
Dopo la pubblicazione di dimostrazioni varie, rivelatesi poi errate, alcuni ricercatori evidenziarono che se esisteva una mappa non 4 colorabile essa doveva risultare particolarmente complicata e avere un numero elevato di vertici.

[6] Vedi paragrafo 1.5.

[7] Heawood si occupò a lungo delle colorazioni e tra l'altro dimostrò che se una mappa è 4 colorabile se il numero di spigoli di ogni sua regione è divisibile per tre.

[8] Nel 1972 Thomas Saaty scrisse un interessante articolo mostrando appunto l'equivalenza dell'ipotesi dei 4 colori con altre trenta diverse formulazioni.

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com
Finito di stampare nel mese di ottobre 2018